



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Decanato de Estudios Profesionales  
Coordinación de Ingeniería Electrónica

ESTUDIO DE LÍNEAS STRIPLINE ACOPLADAS SIMÉTRICAS UTILIZANDO  
DIFERENCIAS FINITAS Y COMPRESIÓN ESPACIAL.

Por  
Jesús Alberto Zambrano

Realizado con la Asesoría de  
Orlando Sucre

PROYECTO DE GRADO  
Presentado ante la Ilustre Universidad Simón Bolívar  
como requisito parcial para optar al título de Ingeniero Electrónico

Sartenejas, junio de 2003



UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR  
Decanato de Estudios Profesionales  
Coordinación de Ingeniería Electrónica

ESTUDIO DE LÍNEAS STRIPLINE ACOPLADAS SIMÉTRICAS UTILIZANDO  
DIFERENCIAS FINITAS Y COMPRESIÓN ESPACIAL.

PROYECTO DE GRADO presentado por  
Jesús Alberto Zambrano

REALIZADO CON LA ASESORIA DE Orlando Sucre

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el estudio de la variación de la impedancia característica de líneas Stripline acopladas simétricas en función del ancho del substrato dieléctrico. Se utiliza un cambio de variables para trasladar el dominio de líneas acopladas con ancho arbitrario en un dominio delimitado. Se obtuvieron las ecuaciones que relacionan el potencial electrostático con la capacitancia por unida de longitud en dicho dominio transformado. Posteriormente se utiliza el Método de Diferencias Finitas para discretizar este dominio, y después aplicar el algoritmo de resolución iterativa en la matriz de potenciales en el dominio transformado discreto.

Se obtuvo resultados de impedancia característica en función del modo de polarización de las líneas, del ancho y la separación relativa entre ellas, del tamaño de la matriz de potenciales y del ancho del substrato dieléctrico (caso finito e infinito). Los resultados de simulaciones obtenidas para ancho infinito del substrato corresponden bastante bien con resultados publicados anteriormente. La impedancia para ambos modos de polarización en substrato finito es menor que en substrato infinito, convergiendo a ésta a una tasa que depende de las relaciones dimensionales de la estructura.

PALABRAS CLAVES

Líneas de Transmisión acopladas - Modos de polarización – Compresión espacial – Diferencias Finitas – Ancho del substrato dieléctrico.

## **AGRADECIMIENTO**

Al Profesor Orlando Sucre, que con sus ideas, conocimientos, carácter investigativo y gran colaboración me motivaron a materializar su proyecto.

A mi madre, por escucharme en los momentos difíciles, por alentarme, y por depositar en mí la fuerza para seguir adelante.

A Brian, Lila, Angela, Valentina y María Alejandra por su apoyo moral. A Alberto por su vital ayuda incondicional.

A todas aquellas personas que de uno u otro modo colaboraron en la realización de este proyecto.

## INDICE GENERAL

CAPITULO 1: INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Antecedentes .....	1
1.2 Objetivo y Justificación.....	2
1.3 Fases del Proyecto.....	3
1.4 Descripción del informe .....	4
CAPITULO 2: IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN ACOPLADAS SIMÉTRICAS.....	5
2.1 Impedancia Característica de una línea de transmisión homogénea .....	5
2.2 Determinación de la Capacitancia por unidad de longitud a partir del potencial electrostático.....	7
2.3 Líneas Stripline Acopladas Simétricas.....	7
2.3.1 Geometría.....	8
2.3.2 Modos de polarización e impedancias características .....	10
2.3.3 Expresión aproximada para la impedancia característica .....	14
CAPITULO 3: DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y DE LA CAPACITANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD USANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS.....	17
3.1 El Método de Diferencias Finitas .....	17
3.2 Forma Discreta de la ecuación de Laplace .....	18

3.3 Resolución iterativa de los potenciales discretos .....	19
3.4 Ecuación discreta para las Capacitancias por unidad de longitud.....	20
<b>CAPITULO 4: CÁLCULO DE IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA EN EL DOMINIO TRANSFORMADO USANDO DIFERENCIAS FINITAS .....</b>	<b>21</b>
4.1 Transformación Espacial de la sección transversal de las líneas Stripline acopladas..	21
4.2 Ecuación de Laplace en Dominio Transformado .....	24
4.3 Ecuación de Capacitancia por unidad de longitud en el Dominio Transformado .....	27
4.4 Método de Diferencias Finitas en el Dominio Transformado .....	28
4.5 Cálculo numérico de la Capacitancia por unidad de longitud.....	30
<b>CAPITULO 5: IMPLEMENTACIÓN .....</b>	<b>32</b>
5.1 Consideraciones para el número de iteraciones de la matriz de potenciales para ancho finito del sustrato .....	32
5.2 Consideraciones en la matriz de iteraciones para sustrato finito.....	32
5.3 Diagramas de flujo de los cálculos .....	34
5.4 Forma de inicialización de potenciales para modos par e impar.....	38
5.5 Panel de simulación.....	39
<b>CAPITULO 6: RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>41</b>
6.1 Impedancias características considerando sustrato infinito.....	41
6.1.1 Error porcentual de las impedancias características calculadas.....	44
6.1.2 Matrices de menor error obtenido .....	46
6.1.3 Número de iteraciones para convergencia de impedancias .....	47

6.2 Impedancia característica considerando substrato finito.....	51
CAPITULO 7: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	57
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	60
APENDICE .....	62

## INDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 2.1: Sección transversal de un par de líneas Stripline acopladas simétricas, mostrando sus dimensiones .....	8
Figura 2.2: Geometría y dimensiones transversales de las líneas acopladas en arreglo Stripline.....	9
Figura 2.3: Representación gráfica de las líneas de campo eléctrico para los modos par e impar en las microlíneas acopladas. ....	10
La figura 2.4 muestra unas líneas de transmisión destacando los voltajes y corrientes de los cuatro puertos de la red .....	11
Figura 2.5: Líneas de transmisión acopladas.....	11
Figura 2.6: (a) Modo de excitación par; (b) Modo de excitación impar. Cada puerto tiene conectado una carga igual a la impedancia característica de las líneas. ....	12
Figura 2.7: (a) Circuito equivalente; (b) Circuito resultante para obtener la capacitancias para excitación en modo par e impar. ....	13
Figura 3.1: Representación de una parte de la matriz de potenciales.....	19
Figura 3.2: Una sección de la matriz de potenciales en dominio original (x,y).....	20
Figura 4.1: Líneas acopladas en el dominio original, destacando el primer cuadrante para la transformación espacial. ....	22
Figura 4.2: Resultado de la transformación del cuadrante superior derecho del dominio original .....	22
Figura 4.3: Una sección de la matriz de potenciales en el dominio transformado. ....	30
Figura 5.1: Diagrama de Flujo que representa la forma de cálculo de Impedancia de modo par e impar para microlíneas de transmisión acopladas. ....	34
Figura 5.2: Algoritmo de inicialización de la matriz de potenciales de las microlíneas de transmisión acopladas. ....	35
Figura 5.3: Algoritmo de reemplazo de matriz aplicado a la matriz de Potenciales de las líneas de transmisión acopladas.....	36
Figura 5.4: Cálculo de la capacitancia por unidad de longitud, la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas, y sus correspondientes errores relativos. ...	37
Figura 5.5: Panel de Control para realizar las simulaciones de las líneas de transmisión acopladas.....	39

Figura 6.1: Impedancia para modo par de las microlíneas de transmisión acopladas. (T): Valor Teórico según Cohn. (C): Valor Calculado. ....	42
Figura 6.2: Impedancia para modo impar de las microlíneas de transmisión acopladas. (T): Valor Teórico según Cohn. (C): Valor Calculado. ....	43
Figura 6.3: Error relativo entre la impedancia de las simulaciones y la impedancia de Cohn, para modo par. ....	44
Figura 6.4: Error relativo entre la impedancia de las simulaciones y la impedancia de Cohn, para modo impar. ....	45
Figura: 6.5: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (92x32).....	47
Figura: 6.6: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (122x42).....	48
Figura: 6.7: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (152x52).....	48
Figura: 6.8: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos, con una matriz (92x32).....	49
Figura: 6.9: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos, con una matriz (122x42).....	49
Figura: 6.10: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos de iteración, con una matriz (152x52).....	50
Figura 6.11: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con sustrato finito e Impedancia de las microlíneas con sustrato infinito, para modo par con $w/h = 0,4$ . .....	51
Figura 6.12: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con sustrato finito e Impedancia de las microlíneas con sustrato infinito, para modo par con $w/h = 1$ . 52	
Figura 6.13: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con sustrato finito e Impedancia de las microlíneas con sustrato infinito, para modo par con $w/h = 2$ . 52	
Figura 6.14: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con sustrato finito e Impedancia de las microlíneas con sustrato infinito, para modo par con $w/h = 5$ . 53	

Figura 6.15: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con $w/h = 0,4$ .	53
Figura 6.16: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con $w/h = 1$ .	54
Figura 6.17: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con $w/h = 2$ .	54
Figura 6.18: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con $w/h = 5$ .	55
Tabla 6.1: Matriz de menor error cometido en las simulaciones para substrato de ancho infinito, para modo par e impar. D = (Descartado). No Estimado para las simulaciones con substrato de ancho finito.	46

## LISTA DE ABREVIATURAS Y SIMBOLOS

- $\gamma$  : Constante de propagación de la onda,  $m^{-1}$ .
- $z$  : Dirección de propagación de la onda, m.
- $Z_0$ : Impedancia característica,  $\Omega$ .
- $L$  : Inductancia de la línea por unidad de longitud, Henrios/m.
- $C$  : Capacitancia de la línea por unidad de longitud, Faradios/m.
- $c$ : Velocidad de la luz, m/seg.
- $\epsilon_r$  : Permitividad relativa del sustrato dieléctrico.
- $\epsilon_0$  : Permitividad relativa del vacío.
- $v$  : Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el sustrato dieléctrico, m/seg.
- $C_e$  : Capacitancia equivalente por unidad de longitud, Faradios/m.
- $U_E$  : Energía eléctrica, Joules.
- $C_{tot}$  : Capacitancia total de las líneas de transmisión acopladas, Faradios.
- $V$  : Voltaje aplicado a las líneas de transmisión, Voltios.
- $\vec{E}$  : Intensidad de campo eléctrico, Voltios/m.
- $s$ : Separación entre las líneas de transmisión acopladas, m.
- $h$ : Mitad de la altura total del sustrato de las líneas de transmisión acopladas, m.
- $a$ : Ancho total del sustrato, m.
- $\vec{H}$  : Intensidad de campo magnético, A/m.
- $\vec{E}_{norm}$  : Componente normal del campo eléctrico, Voltios/m.
- $\vec{H}_{tan}$  : Componente tangencial del campo magnético, Amperios/m.
- $\vec{E}_{tan}$  : Componente tangencial del campo eléctrico, Voltios/m.
- $\vec{H}_{norm}$  : Componente normal del campo magnético, Amperios/m.
- TEM: Modo de propagación transversal electromagnético.
- $Z_{o_{p,i}}$  : Impedancia característica (p: de modo par, i: de modo impar),  $\Omega$ .
- $C_o$  : Capacitancia propia por unidad de longitud de un arreglo de líneas acopladas, Faradios/m.

$C_m$ : Capacitancia mutua por unidad de longitud de un arreglo de líneas acopladas, Faradios/m.

$C_{p,i}$ : Capacitancia por unidad de longitud de las líneas acopladas (p: en modo par, i: en modo impar) en el vacío, Faradios/m.

$C_{p,i}(\epsilon_r)$ : Capacitancia por unidad de longitud de las líneas acopladas (p: en modo par, i: en modo impar) en un substrato dieléctrico. Faradios/m.

$\omega$ : Frecuencia angular, rad/seg.

$\mu_o$ : Permeabilidad absoluta del vacío, Henrios/m.

$\epsilon_o$ : Permitividad del vacío, Faradios/m.

$\beta$ : Constante de fase, rad/m.

$K(k)$ : Función integral elíptica completa de primer orden y argumento  $k$ .

$w$ : Ancho de las líneas de transmisión, m.

$C'_f(0)$ : Capacitancia por unidad de longitud desde un borde de una línea de transmisión a un plano de tierra, Faradios/m.

$C'_{f,p,i}\left(0, \frac{S}{h}\right)$ : Capacitancia por unidad de longitud a los bordes adyacentes entre las líneas de transmisión (p: en modo par, i: en modo impar), Faradios/m.

$S.T.$ : Sección transversal.

$\phi$ : Potencial eléctrico, Voltios.

$\nabla\phi$ : Gradiente de  $\phi$ .

$\nabla^2\phi$ : Laplaciano de  $\phi$ .

$(x, y)$ : Par ordenado en el plano cartesiano del dominio original.

$\Psi(x, y)$ : Campo escalar función de las coordenadas  $x$  e  $y$ .

$\Delta$ : Diferencia de longitudes, m.

$a$ : Ancho total del substrato dieléctrico, m.

$(u, v)$ : Par ordenado en el plano cartesiano del dominio transformado.

$A, B, D, x_o$ : Constantes de la transformación espacial.

$h_u, h_v$ : Coeficientes métricos de la ecuación de Laplace transformada.

$C_1, C_2, C_3, C_4$ : Coeficientes asociados a la ecuación de Laplace transformada.

$x_1; x_2; x_3; x_4$  : Pesos de ponderación del potencial electrostático en el dominio transformado.

$C_o$  : Capacitancia por unidad de longitud en el vacío, Faradios/m.

$(i, j)$  : Par ordenado en el plano cartesiano del dominio transformado discreto. (acomodar)

$N$  : número entero utilizado en la definición del tamaño de la matriz de potenciales.

$i_{\max}$  : Abscisa máxima en el plano cartesiano del dominio transformado discreto.

$j_{\max}$  : Ordenada máxima en el plano cartesiano del dominio transformado discreto.

## CAPITULO 1

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1 Antecedentes

Para determinar las características de propagación de las líneas de transmisión acopladas se ha dispuesto de varias técnicas analíticas. Los métodos que se emplean generalmente son: el método de los modos par e impar, la formulación de modos acoplados, la técnica de transformación gráfica y la técnica de la transformación congruente. [1, 2]

El método de modos par e impar es conveniente para líneas acopladas simétricas. Aquí, la propagación de la onda se expresa en términos de dos modos (par e impar), el eje de simetría puede reemplazarse por una pared eléctrica o magnética para efectos del análisis modal.

En el método de los modos acoplados, la propagación de las ondas se expresa en términos de los modos de propagación de las líneas individuales no acopladas (dados en términos de capacitancias e inductancias propias de cada microlínea), adicionando el efecto de acople dado por las capacitancias e inductancias mutuas. Este método es aplicable también a líneas acopladas asimétricas. [3]

Los últimos dos métodos se basan en la representación de los sistemas de líneas acopladas en términos de redes equivalentes [4]. El método de la transformación gráfica hace un equivalente de flujo a la red general de líneas acopladas. Con el método de la transformación congruente también se puede establecer un circuito equivalente; este método es útil cuando se tiene un gran número de líneas acopladas juntas.

Existen métodos y fórmulas exactas en términos de integrales elípticas para el análisis de los modos par e impar de las microlíneas acopladas en la geometría Stripline, éstos consideran un grosor cero en los conductores de las microlíneas y un ancho infinito del substrato. Para obtener resultados prácticos se ha recurrido a aproximaciones gráficas de las expresiones exactas, las más empleadas son las dadas por Cohn [5].

Un método utilizado para diseñar las dimensiones de un arreglo Stripline de líneas acopladas es el de los nomogramas, que consiste en un par de escalas de valores de impedancias par e impar dispuestos en una regla graduada, de forma tal que, dados los valores de las impedancias, se obtiene mediante un trazado de líneas entre esas escalas, los valores de las dimensiones que debe tener la estructura de las microlíneas para cumplir con las especificaciones de diseño (situadas en otra regla graduada). [6]

En relación a las fórmulas dadas en integrales elípticas para el cálculo de impedancias en modo par e impar de las microlíneas; en aplicaciones donde se opere a altos niveles de potencial, para evitar daños se usan conductores redondos en vez de delgadas líneas. Honey [7] ha derivado las fórmulas aproximadas para estas estructuras particulares, que involucran variables como el diámetro de los conductores, espaciamiento entre los centros de los conductores, y entre los planos de tierra y la permitividad relativa.

Otros trabajos de investigación han combinado el método de diferencias finitas junto con resultados obtenidos del método de transformaciones espaciales no lineales, para analizar estructuras como el Stripline y el Microstrip (sólo una línea de transmisión). Este desarrollo teórico ha sido dirigido en la U.S.B por O. Sucre, en sus trabajos se introduce un cambio de variables espacial, para transformar regiones tanto ilimitadas como limitadas de las estructuras, en regiones limitadas; para así poder utilizar el método de diferencias finitas en esta región resultante; obteniéndose resultados de interés práctico para tales geometrías. [8, 9]

## **1.2 Objetivo y Justificación**

El objetivo de este proyecto es determinar las impedancias de modo par y de modo impar de líneas Stripline acopladas simétricas en función de la permitividad relativa, el grosor y el ancho del sustrato dieléctrico, del ancho de los conductores y de la separación entre éstos, utilizando el método de Diferencias Finitas en conjunto con una Compresión Espacial.

Los trabajos relacionados con el estudio de líneas de transmisión acopladas hacen la aproximación de que el sustrato dieléctrico es infinito. [5, 10, 11].

El presente proyecto está enmarcado en la línea de investigación “Análisis de Líneas de Transmisión Impresas utilizando el método de Diferencias Finitas y Compresión Espacial”, en el cual hasta ahora se han desarrollado una tesis de pregrado [12] y una de maestría, y se han realizado diversas publicaciones. Se pretende obtener resultados de interés práctico que den lugar a al menos una publicación. Adicionalmente, este trabajo podría servir de punto de partida para otros trabajos similares, por ejemplo con líneas Stripline acopladas asimétricas y líneas Microstrip acopladas simétricas.

### **1.3 Fases del Proyecto**

La primera fase del proyecto consistió en un estudio teórico de la teoría de las líneas de transmisión acopladas simétricas y su implementación Stripline. Por otra parte, se hizo un estudio del método de Diferencias Finitas y del método de Compresión Espacial, luego se estableció una fórmula de compresión espacial contemplando ancho infinito y finito del sustrato, y se estableció la formulación de Diferencias Finitas para el cálculo en el dominio transformado del potencial normalizado, la capacitancia por unidad de longitud y la impedancia para ambos modos de polarización. Se estableció el método de reemplazo de matriz como forma de cálculo de potencial en el dominio transformado, además, se definió las dimensiones transversales de los casos de estudio.

En la segunda fase se desarrolló el programa encargado de las simulaciones, utilizando el programa MatLab versión 5.3. Una vez desarrollado el programa se comenzaron las pruebas con líneas de ancho infinito para ambos modos de polarización. Con esto se realizó el ajuste del tamaño de las matrices y del número de iteraciones. También se hizo el estudio teórico de la impedancia característica en la estructura con sustrato de ancho finito y sus consideraciones en el algoritmo de simulaciones.

La tercera fase del proyecto consistió en realizar las pruebas con sustrato de ancho finito en las líneas acopladas para ambos modos de polarización, y su posterior comparación con los resultados obtenidos en el caso de sustrato infinito.

## **1.4 Descripción del informe**

El presente informe consta de seis capítulos y un apéndice. En el capítulo 2 se presenta el fundamento teórico de una línea de transmisión homogénea y de las líneas acopladas simétricas en arreglo Stripline, su geometría, modos de polarización, el cálculo teórico de la impedancia característica y sus aproximaciones numéricas. Seguidamente, en el capítulo 3 se introduce el método de Diferencias Finitas como vía de solución numérica del potencial electrostático y la forma de resolución iterativa de éste en las líneas de transmisión. El capítulo 4 introduce el cálculo de la impedancia característica de las líneas acopladas Stripline en el dominio transformado basado en los conceptos presentados en el capítulo 3 y del método de Compresión Espacial aplicado al dominio original de las líneas de transmisión.

El capítulo 5 describe todo lo relacionado a la forma de implementación y simulación para la realización de la pruebas en la estructura transformada de las líneas acopladas. En el capítulo 6 se reportan los resultados de las simulaciones realizadas, y finalmente, el capítulo 7 se dedica a las conclusiones y recomendaciones. En el apéndice se encuentran las tablas de resultados de todas las simulaciones realizadas.

## CAPITULO 2

### IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA DE LAS LÍNEAS DE TRANSMISIÓN ACOPLADAS SIMÉTRICAS

En el presente capítulo se presenta un estudio electromagnético de una línea de transmisión homogénea, la determinación de la capacitancia por unidad de longitud a partir del potencial electrostático, seguidamente se hace un estudio de las líneas de transmisión acopladas simétricas dispuestas en arreglo Stripline. Para ello, primero se describe la forma geométrica de dicha estructura, sus modos de polarización y el cálculo de la impedancia característica para ambos modos.

Luego se presentan las aproximaciones numéricas de la impedancia propuestas por Cohn [5] para ambos modos de polarización. Estas expresiones serán la referencia teórica para la comparación de los resultados dados en las simulaciones de este proyecto.

#### 2.1 Impedancia Característica de una línea de transmisión homogénea

Considerando la forma de los campos eléctricos y magnéticos (y en consecuencia los voltajes y corrientes asociados) como armónicos en el tiempo, utilizando notación compleja, la ecuación de onda que debe satisfacerse en una región dieléctrica sin fuentes (ecuación para líneas de transmisión armónica en el tiempo para los fasores de voltajes y corrientes), resulta en una forma exponencial  $e^{\mp\gamma z}$ , donde  $\gamma$  es la constante de propagación, y  $z$  la dirección de propagación de las ondas TEM y, claro está, de los fasores de voltaje y corriente.

Existe una impedancia en cualquier punto que dé hacia una línea de transmisión infinitamente larga (sin reflexiones). Esta impedancia es la *impedancia característica*  $Z_0$  de la línea. Si se realiza el cociente entre los fasores de voltaje y corriente en cualquier punto de una línea finita terminada en el propio valor de la impedancia característica  $Z_0$ , se obtiene que la impedancia característica de la línea también es  $Z_0$ . Por lo que los voltajes y corrientes distribuidos en una línea infinita son los mismos que en los de una línea finita

terminada en  $Z_0$  (línea acoplada) [13]. Para líneas sin pérdidas la impedancia característica  $Z_0$  es real, y es dada por la siguiente expresión:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega) \quad (2.1)$$

donde  $L$  (Henry/m) es la inductancia de la línea por unidad de longitud y  $C$  (Faradios/m) es la capacitancia de la línea por unidad de longitud.

Para líneas de transmisión homogéneas (como la Stripline), la velocidad de propagación y de fase son las mismas ( $v$ ), y están dadas por:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.2)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.3)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $\epsilon_r$  es la permitividad relativa del sustrato

Igualando estas ecuaciones, y despejando  $L$  en términos de  $C$ , y sustituyendo en (2.1) queda:

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c \cdot C} \quad (2.4)$$

En un medio homogéneo se puede escribir que:  $C = \epsilon_r C_e$ , donde  $C_e$  denota a la capacitancia por unidad de longitud en una línea de transmisión con la misma geometría de la línea original, en la que se reemplaza al sustrato por vacío. De acuerdo a esto, la ecuación (2.4) se puede expresar como:

$$Z_0 = \frac{1}{c \cdot C_e \sqrt{\epsilon_r}} \quad (2.5)$$

## 2.2 Determinación de la Capacitancia por unidad de longitud a partir del potencial electrostático

Partiendo de la ecuación de energía eléctrica almacenada en un capacitor:

$$U_E = \frac{1}{2} C_{tot} |V|^2 = \frac{\epsilon_o}{2} \iiint_{Vol} \epsilon_r |\vec{E}|^2 dV \quad (2.6)$$

Tomando el voltaje  $V = 1V$ , se obtiene la expresión:

$$C_{tot} = \epsilon_o \epsilon_r \iiint_{Vol} |\vec{E}|^2 dV \quad (2.7)$$

con lo que la capacitancia por unidad de longitud queda como:

$$C = \epsilon_o \epsilon_r \iint_{S.T.} |\vec{E}|^2 dS \quad (2.8)$$

El campo eléctrico en las líneas de transmisión cumple las siguientes ecuaciones:

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (2.9) \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.10)$$

por lo que la ecuación (2.8) toma la forma:

$$C = \epsilon_o \epsilon_r \iint_{S.T.} |\nabla \phi|^2 dS \quad (2.11)$$

## 2.3 Líneas Stripline Acopladas Simétricas

Las líneas de Transmisión Acopladas están constituidas por un par de conductores paralelos idénticos y un plano conductor adicional aterrado. El conjunto forma una red de cuatro puertos, y se utiliza entre los dispositivos de microondas para implementar acopladores direccionales y diversas clases de filtros.

Una de las formas de construcción de las líneas acopladas simétricas es utilizando la tecnología Stripline, como lo muestra la figura 2.1:

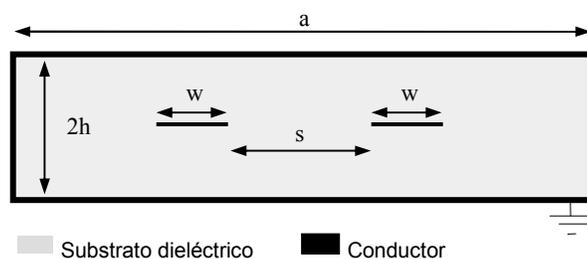


Figura 2.1: Sección transversal de un par de líneas Stripline acopladas simétricas, mostrando sus dimensiones

Las líneas gruesas representan a los conductores. Las dimensiones de la estructura son  $s$  (separación entre las líneas),  $w$  (ancho de los conductores),  $2h$  (grosor total del sustrato) y  $a$  (ancho total del sustrato). El sistema completo de líneas de transmisión incluye al sustrato dieléctrico y a las cuatro placas de aterramiento.

### 2.3.1 Geometría

Las topologías de arreglo Stripline a ser estudiadas en este proyecto son de tipo blindado y abierto. La primera es un caso particular de la segunda, en el que el blindaje lateral (pared conductora aterrada) está situada en el infinito. La geometría de la sección transversal para ambas topologías posee simetría tanto vertical como horizontal.

La figura 2.2 muestra la geometría del arreglo, así como las dimensiones transversales. Se considera que el grosor de los conductores es cero.

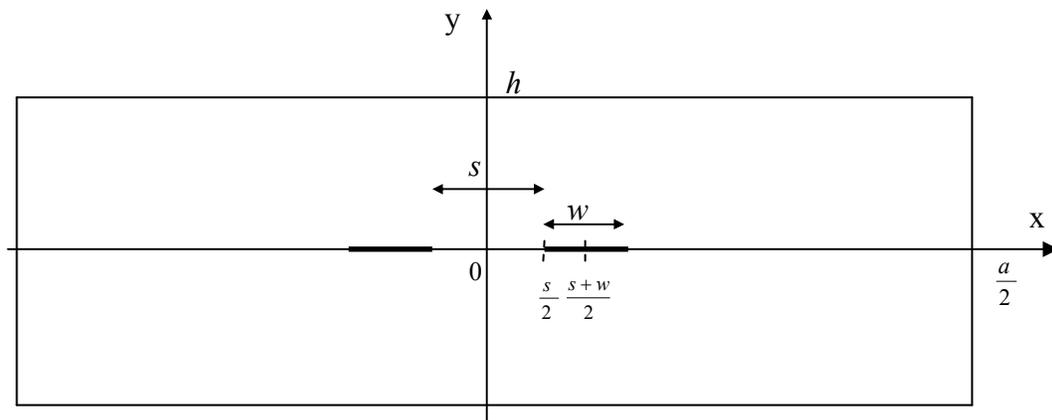


Figura 2.2: Geometría y dimensiones transversales de las líneas acopladas en arreglo Stripline.

Las condiciones de borde dependen del tipo de polarización a las que están sometidas las líneas de transmisión, a saber:

Para el modo par:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi &= 1V \text{ para ambos conductores} \\
 \phi &= 0V \text{ en la pared conductora exterior} \\
 \left. \begin{aligned}
 \phi(-x, y) &= \phi(x, y) \\
 \phi(x, -y) &= \phi(x, y)
 \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 \leq x \leq a/2 ; 0 \leq y \leq h
 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Para el modo impar:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi &= 1V \text{ para un conductor, } \phi = -1V \text{ para el otro conductor} \\
 \phi &= 0V \text{ en la pared conductora exterior} \\
 \phi(0, y) &= 0V \text{ para } -h \leq y \leq h \\
 \left. \begin{aligned}
 \phi(-x, y) &= \phi(x, y) \\
 \phi(x, -y) &= \phi(x, y)
 \end{aligned} \right\} \text{ para } 0 \leq x \leq a/2 ; 0 \leq y \leq h
 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Modos de polarización e impedancias características

Existen dos modos fundamentales de polarización en un par de líneas de transmisión localizados entre dos planos paralelos conectados a tierra, el *modo par* y el *modo impar*. El modo par se obtiene cuando las dos líneas de transmisión poseen el mismo voltaje (amplitud y fase) y conducen corrientes de igual magnitud y en la misma dirección. Por otro lado, el modo impar se logra cuando se aplican voltajes de igual amplitud pero de fases opuestas, y conducen corrientes de igual magnitud pero en direcciones opuestas. [5, 6] .La figura 2.3 muestra la distribución del campo eléctrico para ambos modos señalados:

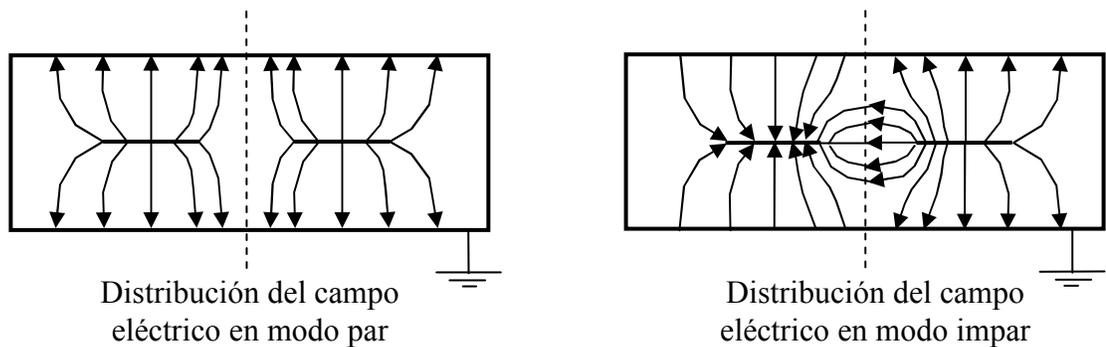
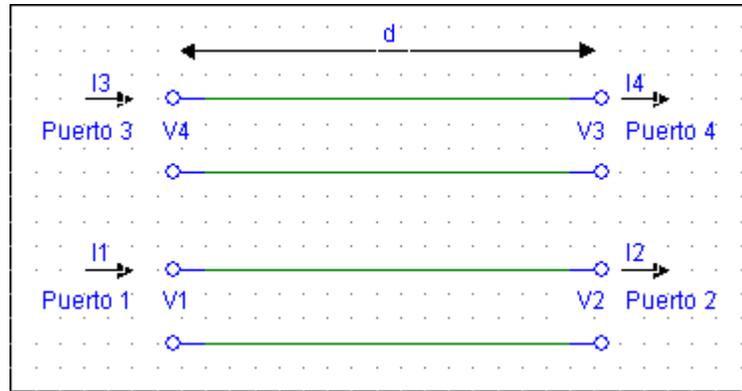


Figura 2.3: Representación gráfica de las líneas de campo eléctrico para los modos par e impar en las microlíneas acopladas.

Como se observa en la figura 2.3, para el *modo par* se produce un campo eléctrico que posee sólo componente tangencial al eje de simetría vertical, por lo que este eje de simetría puede ser reemplazado por una pared magnética ( $\vec{E}_{norm} = \vec{0}, \vec{H}_{tan} = \vec{0}$ ). De modo similar, para el *modo impar*, se obtiene un campo eléctrico con sólo componente normal al eje de simetría vertical; por lo que este eje de simetría puede ser reemplazado por una pared eléctrica ( $\vec{E}_{tan} = \vec{0}, \vec{H}_{norm} = \vec{0}$ ).

A modo general, la propagación de ondas en el par de líneas acopladas viene dado por una superposición de los modos par e impar, y generalmente, cada uno con diferentes

amplitudes y fases. [10]. El tipo de estructura que se analizará se muestra en forma de diagrama en la figura 2.4.



La figura 2.4 muestra unas líneas de transmisión destacando los voltajes y corrientes de los cuatro puertos de la red.

Como se dijo anteriormente, la propagación de ondas en el par de líneas se puede dividir en dos modos de excitación. El análisis del par de líneas de transmisión se facilita si se conectan cargas de igual valor que la impedancia característica de las líneas ( $Z_L = Z_0$ ) en los puertos 2, 3 y 4; y conectando una fuente de 2V en el puerto 1, con impedancia de  $Z_0$ , como la muestra la figura 2.5:

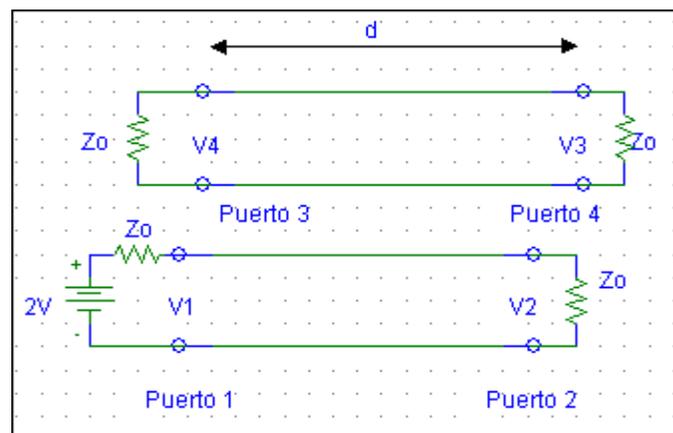


Figura 2.5: Líneas de transmisión acopladas

Se puede realizar el análisis de este circuito dividiéndolo en dos modos, uno par y otro impar, como se observa en la figura 2.6. Por tanto, la impedancia par  $Z_{o_p}$  es la impedancia característica de las líneas acopladas bajo excitación par, y la impedancia impar  $Z_{o_i}$  es la impedancia característica de las líneas acopladas bajo excitación impar.

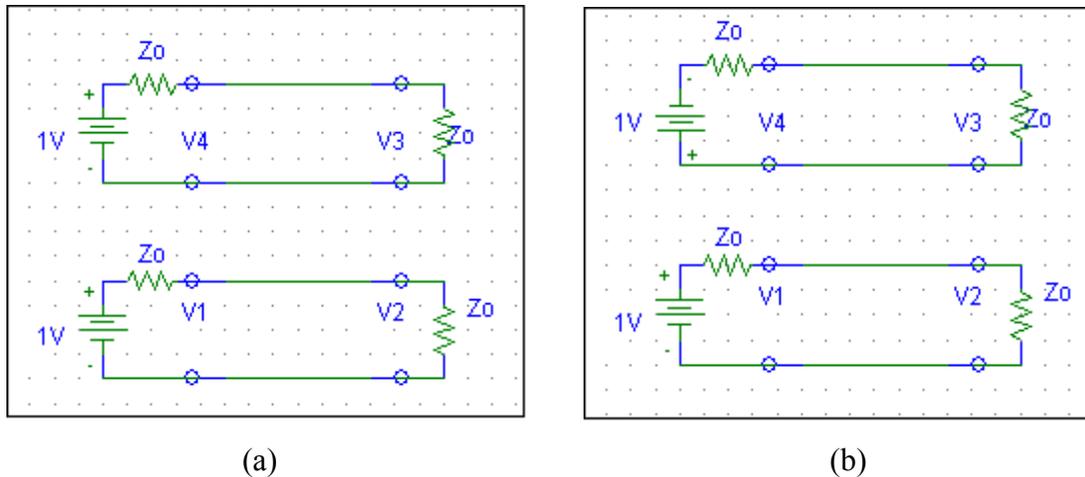


Figura 2.6: (a) Modo de excitación par; (b) Modo de excitación impar. Cada puerto tiene conectado una carga igual a la impedancia característica de las líneas.

Por otra parte, existen modelos de circuitos equivalentes para líneas de transmisión acopladas, en los cuales la impedancia característica se determina a partir capacitancias o de inductancias, y del material dieléctrico. Estas capacitancias o inductancias dependen del modo par o impar de excitación de las líneas; por lo que existe una impedancia para modo par y una impedancia para modo impar.

La figura 2.7 muestra una red circuital de capacitancias equivalente a un par de líneas acopladas, Las siglas I y II denotan a el par de pistas que conforman las líneas de transmisión,  $C_m$  es la capacitancia por unidad de longitud entre los conductores, llamada también capacitancia mutua;  $C_o$  es la capacitancia por unidad de longitud de cada conductor con respecto a tierra, llamada también capacitancia propia.

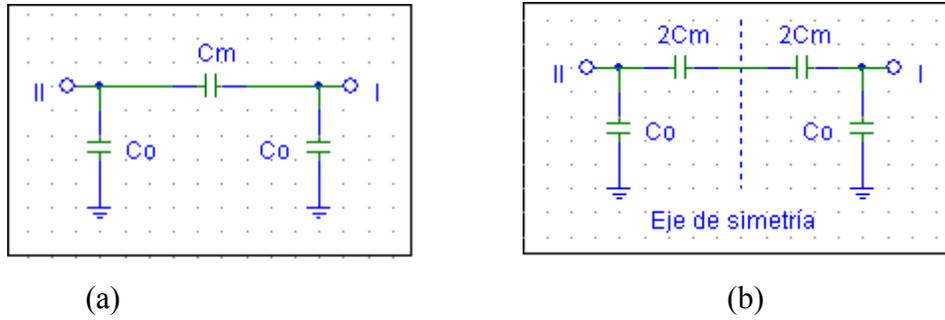


Figura 2.7: (a) Circuito equivalente; (b) Circuito resultante para obtener la capacitancias para excitación en modo par e impar.

Para dividir el circuito respecto al eje de simetría vertical, la capacitancia mutua  $C_m$  se divide en dos capacitancias en serie, de valor  $2C_m$ . Como se observó en la figura 2.3, para modo par se establece una pared magnética en el eje de simetría vertical, la cual actúa como un circuito abierto que separa la red en dos pedazos. La capacitancia par resultante será:

$$C_p = C_o \quad (2.14)$$

Para el modo impar, al establece una pared eléctrica en el eje de simetría vertical, ésta actúa como un corto circuito para el circuito equivalente. La capacitancia impar resultante será:

$$C_i = C_o + 2C_m \quad (2.15)$$

Con esto es posible obtener el valor de las impedancias de modo par e impar a través de la medición de dichas capacitancias de las líneas acopladas, como lo muestra la siguiente relación:

$$Z_{o_{p,i}} = \frac{\omega}{\beta_{p,i}} \frac{\mu_o \epsilon_o}{C_{p,i}} \quad \text{donde} \quad \beta_{p,i} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{C_{p,i}(\epsilon_r)}{C_{p,i}}} \quad (2.16)$$

quedando:

$$Z_{o_{p,i}} = \frac{1}{c \sqrt{C_{p,i} \cdot C_{p,i}(\epsilon_r)}} \quad (2.17)$$

$C_{p,i}$  es la capacitancias para líneas de transmisión en el vacío,  $C_{p,i}(\epsilon_r)$  es para líneas con substrato dieléctrico  $\epsilon_r$ .

En la práctica es muy conveniente medir la capacitancia entre ambas líneas y tierra, y la capacitancia mutua ente líneas [10, 14, 15].

Por tanto, una vez hallada la capacitancia por unidad de longitud según el tipo de configuración de las líneas acopladas (modo par o impar), la impedancia para cada modo viene dada por:

$$Z_{o_p} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot c \cdot C_p} \quad (2.18)$$

$$Z_{o_i} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot c \cdot C_i} \quad (2.19)$$

Interpretando estos resultados se tiene que, la capacitancia en modo par es la mitad de la capacitancia del paralelo entre los dos conductores centrales de la estructura y tierra. La capacitancia en modo impar corresponde a la mitad de la capacitancia entre los dos conductores centrales.

### 2.3.3 Expresión aproximada para la impedancia característica

Existen otras expresiones que determinan las impedancias para ambos modos, éstas están dadas en términos de integrales elípticas usando transformaciones conformes, método basado en un análisis numérico estático de la región transversal de la estructura.

Las expresiones resultantes son:

$$Z_{o_p} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k'_p)}{K(k_p)} \quad (2.20)$$

$$Z_{o_i} = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K(k'_i)}{K(k_i)} \quad (2.21)$$

donde  $Zo_p$  y  $Zo_i$  son las impedancia característica de modo par e impar respectivamente, medidas desde una línea de transmisión a tierra;  $\varepsilon_r$  es la permitividad del substrato donde están sumergidas las microlíneas;  $K(k)$  es una función que representa la integral elíptica completa de primer orden, cuya expresión es:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (k \cdot \sin \theta)^2}} \quad (2.22)$$

donde el argumento de la función,  $(k)$ , que es usado para las ecuaciones anteriores tanto para modo par como impar, posee las siguientes relaciones:

$$k_p = \tanh\left(\frac{\pi w}{2h}\right) \cdot \tanh\left(\pi \frac{w+s}{2h}\right) \quad (2.23) \quad k'_p = \sqrt{1 - k_p^2} \quad (2.24)$$

$$k_i = \tanh\left(\frac{\pi w}{2h}\right) \cdot \coth\left(\pi \frac{w+s}{2h}\right) \quad (2.25) \quad k'_i = \sqrt{1 - k_i^2} \quad (2.26)$$

donde  $(w)$  representa el ancho de cada microlínea,  $(s)$  la separación entre microlíneas,  $(h)$  la altura total del substrato. Se puede aplicar una aproximación en serie de potencias a las integrales elípticas para obtener expresiones simplificadas y aproximadas de las impedancias par e impar. [10]

Las expresiones anteriores han sido demostradas rigurosamente por Cohn [5]. Esta autor ha publicado aproximaciones gráficas de las expresiones teóricas antes señaladas, entre ellas la que se utilizó como valor teórico de comparación para este proyecto, que toma la forma:

$$Zo_{p,i} = \frac{94,15}{\sqrt{\varepsilon_r} \left[ \frac{w}{h} + \frac{1}{2\varepsilon} \left( C'_f(0) + C'_{f,p,i} \left( 0, \frac{s}{h} \right) \right) \right]} \quad (2.27)$$

donde  $\varepsilon = 0,0885\varepsilon_r$  en  $\mu\text{f}/\text{cm}$ ;  $C'_f(0)$  representa la capacitancia en  $\mu\text{f}/\text{cm}$  desde un borde de una microlínea a un plano de tierra;  $C'_{f,p,i}(0, s/h)$  son las capacitancias en  $\mu\text{f}/\text{cm}$  a los bordes adyacentes entre las microlíneas para la distribución del campo eléctrico en los modos par e impar. Estas expresiones se escriben como:

$$\frac{C'_f(0)}{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \ln 2 \quad (2.28)$$

$$\frac{C'_{fp}\left(0, \frac{s}{h}\right)}{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \ln \left[ 1 + \tanh\left(\frac{\pi s}{2h}\right) \right] \quad (2.29)$$

$$\frac{C'_{fi}\left(0, \frac{s}{h}\right)}{\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \ln \left[ 1 + \coth\left(\frac{\pi s}{2h}\right) \right] \quad (2.30)$$

## CAPITULO 3

### DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL ELECTROSTÁTICO Y DE LA CAPACITANCIA POR UNIDAD DE LONGITUD USANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

En este capítulo se hace un análisis del método de Diferencias Finitas para solucionar numéricamente el potencial electrostático, que será usado para escribir en forma discreta la ecuación del potencial electrostático en la estructura. Luego se estudia una técnica de resolución iterativa de la matriz de potenciales en la sección transversal de la estructura, para así poder describir la capacitancia por unidad de longitud en términos discretos

#### 3.1 El Método de Diferencias Finitas

Este método es aplicado para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales como vía de aproximación para su solución numérica. Ya que no existe una solución en forma cerrada, es decir, dada en términos analíticos, se espera con este método obtener resultados numéricos que se aproximen lo más posible a la solución exacta de la impedancia característica de las microlíneas acopladas.

El método de diferencias finitas se aplica superponiendo a la superficie en cuestión una retícula, transformando las derivadas parciales (de orden  $n$ -ésimo) en ecuaciones de diferencias donde, claro está, se involucra a la función incógnita en los nodos de la retícula, previamente identificados.

Supóngase que la función  $\Psi(x, y)$  es solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden. Considerando una retícula dividida uniformemente, donde cada cruce  $(i, j)$  representa un punto  $x_i, y_j$ ; donde  $x_i - x_{i-1} = \Delta = y_j - y_{j-1}$ , las aproximaciones que se hacen a las derivadas parciales de primer y segundo orden vienen dadas en términos de diferencias centrales [15].

Las siguientes ecuaciones muestran tales aproximaciones:

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x_i, y_j} \approx \frac{\Psi(i+1, j) - \Psi(i-1, j)}{2\Delta} \quad (3.1) \qquad \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j} \approx \frac{\Psi(i+1, j) + \Psi(i-1, j) - 2\Psi(i, j)}{\Delta^2} \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{x_i, y_j} \approx \frac{\Psi(i, j+1) - \Psi(i, j-1)}{2\Delta} \quad (3.3) \qquad \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{x_i, y_j} \approx \frac{\Psi(i, j+1) + \Psi(i, j-1) - 2\Psi(i, j)}{\Delta^2} \quad (3.4)$$

Se observa que las primeras derivadas parciales son tomadas a partir de un punto antes y un punto después del punto  $(i, j)$ , por lo que se ha tomado la separación de  $2\Delta$  indicada en sus expresiones. Las derivadas segundas están calculadas en base a tomar las primeras derivadas con espaciamiento de  $\Delta$ . El resultado es que las derivadas segundas poseen el espaciamiento de  $2\Delta$ , por lo que el juego de derivadas está listo para sustituirlo en la ecuación de Laplace, ecuación (2.10).

### 3.2 Forma Discreta de la ecuación de Laplace

La sustitución de las aproximaciones de las derivadas parciales de primer y segundo orden dadas en diferencias finitas en la ecuación (2.10), queda de la forma:

$$0 = \frac{\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) - 2\phi(i, j)}{\Delta^2} + \frac{\phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) - 2\phi(i, j)}{\Delta^2} \quad (3.5)$$

Escrito de otra forma queda como:

$$\phi(i, j) = \frac{1}{4} [\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) + \phi(i, j+1) + \phi(i, j-1)] \quad (3.6)$$

De la ecuación anterior se observa que el potencial en el punto  $(i, j)$  se puede interpretar como el promedio de los cuatro potenciales vecinos en la retícula.

### 3.3 Resolución iterativa de los potenciales discretos

La ecuación (3.6) proporciona información de la forma de dependencia del potencial en un punto  $(i,j)$  dado. Por otra parte, si se define una matriz de potenciales que abarque la sección transversal de las microlíneas y se recorren todos sus elementos para el cálculo de sus valores, se observa que estos dependen de valores de potenciales pasados. Esto se visualiza en la figura 3.1.

$$\begin{array}{ccccc} & & \cdot & (i, j + 1) & \cdot \\ & & & & \\ (i - 1, j) & & (i, j) & \rightarrow & (i + 1, j) \\ & & \cdot & (i, j - 1) & \cdot \end{array}$$

Figura 3.1: Representación de una parte de la matriz de potenciales.

El valor del potencial en el punto  $(i,j)$ , según la ecuación (3.6), como ya se mencionó, depende de los potenciales cercanos, y además, esos potenciales cercanos corresponden a los valores obtenidos en la iteración anterior. Por tanto, la ecuación (3.6) se rescribe así.

$$V^{(k)}(i, j) = \frac{1}{4} [\phi^{(k-1)}(i + 1, j) + \phi^{(k-1)}(i - 1, j) + \phi^{(k-1)}(i, j + 1) + \phi^{(k-1)}(i, j - 1)] \quad (3.7)$$

Donde el potencial encontrado  $V^{(k)}(i, j)$  en la iteración  $(k)$  depende de los potenciales cercanos, para la iteración  $(k-1)$ . Después de recorrer toda la matriz, se hace un reemplazo de valores entre matrices, este es:

$$[\phi]^{(k)} = [V]^{(k)} \quad (3.8)$$

y se pasa a la siguiente iteración.

Con esta forma de resolución iterativa de los potenciales discretos se garantiza que cada valor de potencial hallado depende además de sus valores cercanos, de estos obtenidos en el ciclo anterior (valores viejos).

### 3.4 Ecuación discreta para las Capacitancias por unidad de longitud

Se puede expresar la ecuación (2.11) en términos de sumatorias realizadas ahora en elementos de área  $\Delta^2 = \Delta x \Delta y$ , para ello es necesario saber el valor del potencial en el centro de cada elemento de área, cuyos extremos están identificados por:  $(x, y), (x + \Delta, y), (x, y + \Delta), (x + \Delta, y + \Delta)$ , una sección del área total de la sumatoria se muestra en la figura 3.2.

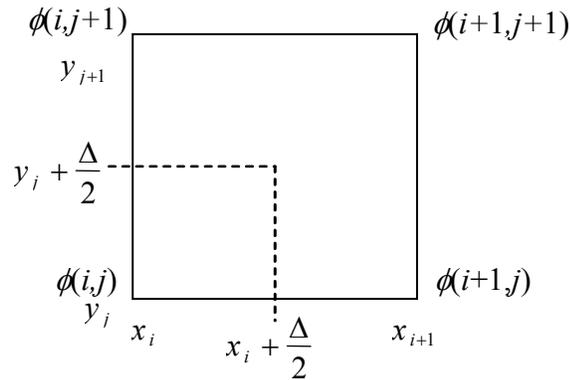


Figura 3.2: Una sección de la matriz de potenciales en dominio original  $(x, y)$ .

Las derivadas parciales de la ecuación (2.11) en el punto  $\left(x_i + \frac{\Delta}{2}, y_j + \frac{\Delta}{2}\right)$  pueden ser aproximadas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_i + \frac{\Delta}{2}, y_j + \frac{\Delta}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_i + \frac{\Delta}{2}, y_{j+1}} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x_i + \frac{\Delta}{2}, y_j} \right] = \frac{1}{2} \frac{[\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j+1) + \phi(i+1, j) - \phi(i, j)]}{\Delta} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x_i + \frac{\Delta}{2}, y_j + \frac{\Delta}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x_i, y_j + \frac{\Delta}{2}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{x_{i+1}, y_j + \frac{\Delta}{2}} \right] = \frac{1}{2} \frac{[\phi(i, j+1) - \phi(i, j) + \phi(i+1, j+1) - \phi(i+1, j)]}{\Delta} \quad (3.10)$$

Por tanto, la ecuación (2.11) escrita en forma discreta queda como:

$$C \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4} \sum_i \sum_j \left\{ [(\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j)) + (\phi(i+1, j) - \phi(i, j+1))]^2 + [(\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j)) - (\phi(i+1, j) - \phi(i, j+1))]^2 \right\} \quad (3.11)$$

## CAPITULO 4

### CÁLCULO DE IMPEDANCIA CARACTERÍSTICA EN EL DOMINIO TRANSFORMADO USANDO DIFERENCIAS FINITAS

Este capítulo está dedicado a definir la transformación espacial de la región, y con ello introducir el cambio de variables espacial adecuado para lograr el cambio de dominios.

Primero se estudiará la geometría de las microlíneas acopladas en arreglo Stripline; posteriormente se definirán las condiciones de borde que rigen a cada la estructura de acuerdo al tipo de polarización que ésta presente. Posteriormente, se expondrá la forma deseada de la geometría de la transformación, para la cual se definirán las transformaciones espaciales correspondientes.

Estableciendo la transformación espacial de la región original, se deducirán para este nuevo dominio las ecuaciones de Laplace y de capacitancia. Y ya conociendo el método de diferencias finitas en el dominio original, éste se rescribirá en este nuevo dominio; para así poder implementar el cálculo numérico de la capacitancia de la región.

#### **4.1 Transformación Espacial de la sección transversal de las líneas Stripline acopladas**

Para resolver la ecuación de Laplace usando el método de diferencias finitas en un dominio cómodo para tal fin, se hace una transformación espacial del dominio original  $(x,y)$  de la Stripline acoplada a uno en el plano  $(u,v)$ . El plano original de la Stripline acoplada se muestra en la figura 4.1, del cual sólo se tomará (aprovechando la simetría) el cuadrante superior derecho de la estructura para la transformación:

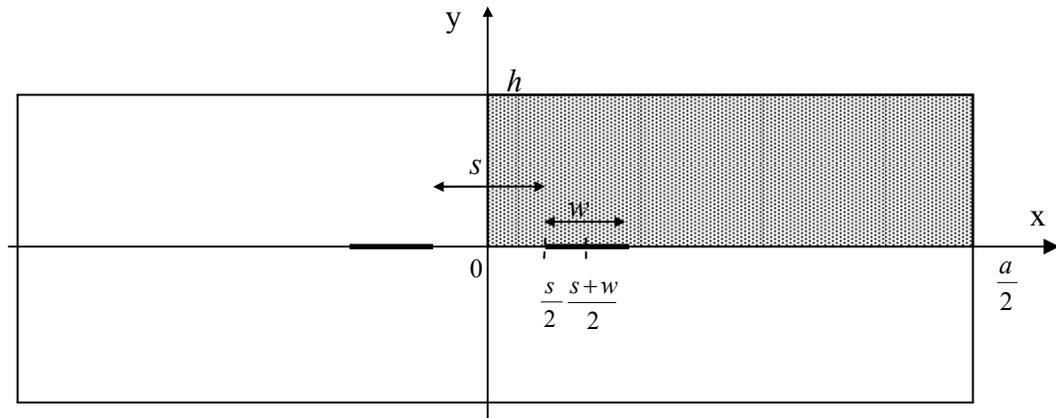


Figura 4.1: Líneas acopladas en el dominio original, destacando el primer cuadrante para la transformación espacial.

La transformación espacial del primer cuadrante de la región original tendrá la forma mostrada en la figura 4.2

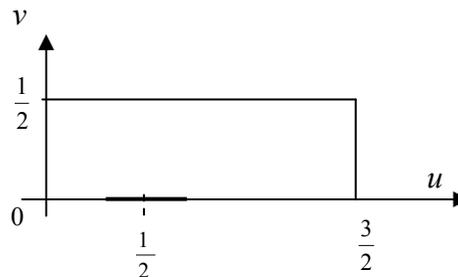


Figura 4.2: Resultado de la transformación del cuadrante superior derecho del dominio original

Como se observa, la transformación espacial no es de *tipo conforme* ya que dicha transformación no conserva los ángulos entre cada par de curvas en cada punto de cualquiera de los dos dominios, sólo conserva los ángulos para rectas paralelas a los ejes (lo que puede hacer pensar engañosamente que fuese de tipo conforme). [16]

Como se observa de la figura 4.1, la estructura no necesita de compresión no lineal en el eje vertical ya que su dimensión no es mucho mayor que el resto de las dimensiones, no así para

el eje horizontal, cuyo problema estriba en que el ancho del sustrato puede ser mucho mayor (sin ser infinito) que el resto de las dimensiones, por lo que para tener una buena resolución sin ninguna transformación se requeriría considerar un número muy grande de puntos en la rejilla de discretización.

Por tal motivo, es necesario comprimir las zonas alejadas de los conductores ya que el potencial más intenso y con más variación está ubicado en la periferia de los mismos, así se busca mayor resolución en esta zona y mucha compresión en las zonas restantes.

El cambio de variables propuesto para la compresión espacial es el siguiente:

$$u(x) = A \cdot \tan^{-1}[B(x - x_o)] + D \quad (4.1) \quad v(y) = \frac{y}{2h} \quad (4.2)$$

Las condiciones de borde son:

$$u(0) = 0 \quad ; \quad u\left(\frac{s+w}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad u\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad (4.3)$$

Se procede a encontrar las constantes  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $x_o$  de la transformación según las condiciones iniciales, obteniéndose las siguientes expresiones:

$$A = \frac{1}{2 \cdot \tan^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1 - 3\left(\frac{s+w}{a}\right)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{s+w}{a}\right)}} \right]} \quad (4.4) \quad B = \frac{2}{(s+w)} \sqrt{\frac{1 - 3\left(\frac{s+w}{a}\right)}{1 - \left(\frac{s+w}{a}\right)}} \quad (4.5)$$

$$D = \frac{1}{2} \quad (4.6) \quad x_o = \frac{s+w}{2} \quad (4.7)$$

con la restricción matemática  $\frac{s+w}{a} < \frac{1}{3}$

## 4.2 Ecuación de Laplace en Dominio Transformado

Para líneas de transmisión Stripline, donde substrato es homogéneo, el potencial electrostático cumple la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.8)$$

Se debe aplicar la transformación espacial a la ecuación de Laplace, recordando que según el cambio de variables antes propuesto 'u' es función de 'x', y 'v' es función de 'y', por lo que se procede así (regla de la cadena):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{1}{h_u(u)} \right) \frac{1}{h_u(u)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

De igual forma,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{1}{h_v(v)} \right) \frac{1}{h_v(v)} \quad (4.10)$$

Por lo que la ecuación de Laplace puede reescribirse como:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{1}{h_u(u)} \right) \frac{1}{h_u(u)} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{1}{h_v(v)} \right) \frac{1}{h_v(v)} = 0 \quad (4.11)$$

donde se han definido los coeficientes métricos:

$$h_u(u) = \frac{dx}{du} \quad (4.12)$$

$$h_v(v) = \frac{dy}{dv} \quad (4.13)$$

Expandiendo la ecuación (4.11) queda:

$$C_1(u) \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + C_2(v) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + C_3(u) \frac{\partial \phi}{\partial u} + C_4(v) \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0 \quad (4.14)$$

donde:

$$C_1(u) = \left( \frac{1}{h_u(u)} \right)^2 \quad C_2(v) = \left( \frac{1}{h_v(v)} \right)^2 \quad C_3(u) = - \left( \frac{1}{h_u(u)} \right)^3 \frac{dh_u(u)}{du} \quad C_4(v) = - \left( \frac{1}{h_v(v)} \right)^3 \frac{dh_v(v)}{dv} \quad (4.15)$$

Se procede al cálculo de estos coeficientes:

Primer coeficiente:

$$C_1(u) = \left( \frac{1}{h_u(u)} \right)^2 \quad \text{sabiendo que } x = \tan \left[ \frac{u-D}{A} \right] \frac{1}{B} + x_o \quad \text{y utilizando la ecuación (4.12)}$$

queda que:  $h_u(u) = \frac{dx}{du} = \frac{1}{AB} \left[ \sec^2 \left( \frac{u-D}{A} \right) \right]$  ; por tanto:

$$C_1(u) = (AB)^2 \cos^4 \left( \frac{u-D}{A} \right) \quad (4.16)$$

Segundo coeficiente:

$$C_2(v) = \left( \frac{1}{h_v(v)} \right)^2 = \left( \frac{1}{dy/dv} \right)^2 \quad \text{como } v = \frac{y}{2h} \rightarrow y = 2hv; \text{ luego:}$$

$$C_2(v) = \left( \frac{1}{2h} \right)^2 \quad (4.17)$$

Tercer coeficiente:

$$C_3(u) = - \left( \frac{1}{dx/du} \right)^3 \frac{d}{du} \left[ \frac{dx}{du} \right] = - \left( \frac{1}{dx/du} \right) C_1(u) \frac{d}{du} \left[ \frac{dx}{du} \right]$$

donde  $\frac{d}{du} \left[ \frac{dx}{du} \right] = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{AB} \left[ \sec^2 \left( \frac{u-D}{A} \right) \right] \right\} = \frac{2}{A^2 B} \sec^2 \left( \frac{u-D}{A} \right) \tan \left( \frac{u-D}{A} \right)$  ; por lo que:

$$C_3(u) = -\frac{1}{\frac{1}{AB} \left[ \sec^2\left(\frac{u-D}{A}\right) \right]} C_1(u) \frac{2}{A^2 B} \sec^2\left(\frac{u-D}{A}\right) \tan\left(\frac{u-D}{A}\right)$$

quedando:

$$C_3(u) = -2AB^2 \cdot \cos^4\left(\frac{u-D}{A}\right) \cdot \tan\left(\frac{u-D}{A}\right) \quad (4.18)$$

Cuarto coeficiente:

$$C_4(v) = -\left(\frac{1}{h_v(v)}\right)^3 \frac{dh_v(v)}{dv} = -\left(\frac{1}{2h}\right)^3 \frac{d}{dv} \left(\frac{dy}{dv}\right) = -\left(\frac{1}{2h}\right)^3 \frac{d}{dv} (2h) = 0 \quad \text{resultando en:}$$

$$C_4(v) = 0 \quad (4.19)$$

En resumen:

$$C_1(u) = (AB)^2 \cos^4\left(\frac{u-D}{A}\right)$$

$$C_2(v) = \left(\frac{1}{2h}\right)^2$$

$$C_3(u) = -2AB^2 \cdot \cos^4\left(\frac{u-D}{A}\right) \cdot \tan\left(\frac{u-D}{A}\right)$$

$$C_4(v) = 0$$

### 4.3 Ecuación de Capacitancia por unidad de longitud en el Dominio Transformado

Para la geometría de las líneas de transmisión acopladas en su implementación Stripline, la ecuación (2.11) resulta en:

$$C_{p,i} = \varepsilon_o \varepsilon_r \int_{-h-a/2}^h \int_{-a/2}^{a/2} |\nabla \phi_{p,i}|^2 dx dy \quad (4.20)$$

que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_o \varepsilon_r \int_{-h-a/2}^h \int_{-a/2}^{a/2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 4 \varepsilon_o \varepsilon_r \int_0^{h-a/2} \int_0^{a/2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= 4 \varepsilon_o \varepsilon_r \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}_{\frac{1}{h_u^2}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \underbrace{\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2}_{\frac{1}{h_v^2}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] (h_u du) (h_v dv) = 4 \varepsilon_o \varepsilon_r \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{h_v}{h_u} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \frac{h_u}{h_v} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] du dv \end{aligned}$$

resultando en:

$$C = 4 \varepsilon_o \varepsilon_r \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \sqrt{\frac{C_1(u)}{C_2(v)}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_2(v)}{C_1(u)}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] du dv \quad (4.21)$$

Por lo que la expresión para la capacitancia por unidad de longitud en el vacío se puede escribir en el dominio transformado como:

$$C_o = 4 \varepsilon_o \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \left[ \sqrt{\frac{C_1(u)}{C_2(v)}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_2(v)}{C_1(u)}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \right] du dv \quad (4.22)$$

#### 4.4 Método de Diferencias Finitas en el Dominio Transformado

La formulación de Diferencias Finitas para el cálculo del voltaje normalizado en la sección transversal de la línea, en el dominio transformado, viene dado de la ecuación (4.14):

$$C_1(u) \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + C_2(v) \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} + C_3(u) \frac{\partial \phi}{\partial u} + C_4(v) \frac{\partial \phi}{\partial v} = 0$$

donde se sustituyen las derivadas parciales escritas bajo diferencias finitas:

$$\begin{aligned} & C_1(u_i) \left[ \frac{\phi(i+1, j) + \phi(i-1, j) - 2\phi(i, j)}{\Delta^2} \right] + C_2(v_j) \left[ \frac{\phi(i, j+1) + \phi(i, j-1) - 2\phi(i, j)}{\Delta^2} \right] + \\ & + C_3(u_i) \left[ \frac{\phi(i+1, j) - \phi(i-1, j)}{2\Delta} \right] + C_4(v_j) \left[ \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j-1)}{2\Delta} \right] = 0 \end{aligned}$$

reacomodando un poco queda:

$$\begin{aligned} & \phi(i+1, j) \left[ C_1(u_i) + \frac{\Delta}{2} C_3(u_i) \right] + \phi(i-1, j) \left[ C_1(u_i) - \frac{\Delta}{2} C_3(u_i) \right] + \\ & + \phi(i, j+1) \left[ C_2(v_j) + \frac{\Delta}{2} C_4(v_j) \right] + \phi(i, j-1) \left[ C_2(v_j) - \frac{\Delta}{2} C_4(v_j) \right] = 2\phi(i, j) [C_1(u_i) + C_2(v_j)] \end{aligned}$$

por tanto, la ecuación de Laplace en diferencias finitas tiene la forma:

$$\phi(i+1, j) \cdot x_1(i, j) + \phi(i-1, j) \cdot x_2(i, j) + \phi(i, j+1) \cdot x_3(i, j) + \phi(i, j-1) \cdot x_4(i, j) = \phi(i, j) \quad (4.23)$$

donde:

$$x_1(i, j) = \frac{C_1(u_i) + \frac{\Delta}{2} C_3(u_i)}{2[C_1(u_i) + C_2(v_j)]} \quad (4.24)$$

$$x_2(i, j) = \frac{C_1(u_i) - \frac{\Delta}{2} C_3(u_i)}{2[C_1(u_i) + C_2(v_j)]} \quad (4.25)$$

$$x_3(i, j) = \frac{C_2(v_j) + \frac{\Delta}{2} C_4(v_j)}{2[C_1(u_i) + C_2(v_j)]} \quad (4.26)$$

$$x_4(i, j) = \frac{C_2(v_j) - \frac{\Delta}{2} C_4(v_j)}{2[C_1(u_i) + C_2(v_j)]} \quad (4.27)$$

En otras palabras, el potencial en un punto  $(i, j)$  (transversal a la línea y en el dominio transformado) es función de los potenciales de los puntos que lo rodean. El potencial en el punto  $(i, j)$  del dominio transformado se puede interpretar como un *promedio ponderado* de sus potenciales cercanos.

Se extendieron los dominios de  $u$  y  $v$  para considerar a la simetría de la estructura:

$$-\Delta \leq u \leq \frac{3}{2}, \quad -\Delta \leq v \leq \frac{1}{2}$$

Donde para el caso de la geometría Stripline queda que:

$$\Delta = \frac{3}{2(i_{\max} - 2)} = \frac{1}{2(j_{\max} - 2)} = \frac{1}{2N} \rightarrow \begin{cases} i_{\max} = 2 + 3N \\ j_{\max} = 2 + N \end{cases}$$

De igual forma, para un punto intermedio en el dominio discreto  $(i, j)$  se cumple que:

$$u_i = \Delta(i - 2), \quad v_j = \Delta(j - 2)$$

donde  $2 \leq i \leq i_{\max}$ ,  $2 \leq j \leq j_{\max}$ .

#### 4.5 Cálculo numérico de la Capacitancia por unidad de longitud

La ecuación discretizada de la capacitancia por unidad de longitud se obtiene a partir de la ecuación (4.22).

Para poder llevar esta integral a forma de sumatoria doble en los cuadrados de área  $\Delta^2$ , se debe conocer el valor del integrando en el centro de cada cuadrado, cuyos vértices vienen identificados según la figura 4.3:

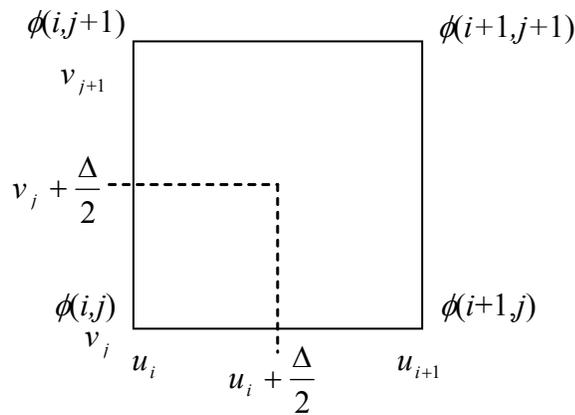


Figura 4.3: Una sección de la matriz de potenciales en el dominio transformado.

Aplicando para la discretización el método de diferencias finitas, se obtiene la siguiente expresión:

$$C = 4\epsilon_o\epsilon_r \sum_i \sum_j \left[ \sqrt{\frac{C_1(u_i + \frac{\Delta}{2})}{C_2(v_j + \frac{\Delta}{2})}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial u} \right)^2 \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j + \frac{\Delta}{2}} + \sqrt{\frac{C_2(v_j + \frac{\Delta}{2})}{C_1(u_i + \frac{\Delta}{2})}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial v} \right)^2 \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j + \frac{\Delta}{2}} \right] \Delta^2 \quad (4.28)$$

Los valores de  $\frac{\partial \phi}{\partial u}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$  en el punto  $\left( u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j + \frac{\Delta}{2} \right)$  se aproximan a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j + \frac{\Delta}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_{j+1}} + \frac{\partial \phi}{\partial u} \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j} \right] = \frac{\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j+1) + \phi(i+1, j) - \phi(i, j)}{2\Delta} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{u_i + \frac{\Delta}{2}, v_j + \frac{\Delta}{2}} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{u_i, v_j + \frac{\Delta}{2}} + \frac{\partial \phi}{\partial v} \Big|_{u_{i+1}, v_j + \frac{\Delta}{2}} \right] = \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j) + \phi(i+1, j+1) - \phi(i+1, j)}{2\Delta} \quad (4.30)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.28), queda:

$$C = 4\varepsilon_o \varepsilon_r \sum_{i=2}^{3n+2n+2} \sum_{j=2}^{3n+2n+2} \left[ \sqrt{\frac{C_1 \left( u_i + \frac{\Delta}{2} \right)}{C_2 \left( v_j + \frac{\Delta}{2} \right)}} \left( \frac{\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j+1) + \phi(i+1, j) - \phi(i, j)}{2\Delta} \right)^2 + \sqrt{\frac{C_2 \left( v_j + \frac{\Delta}{2} \right)}{C_1 \left( u_i + \frac{\Delta}{2} \right)}} \left( \frac{\phi(i, j+1) - \phi(i, j) + \phi(i+1, j+1) - \phi(i+1, j)}{2\Delta} \right)^2 \right] \Delta^2$$

reacomodando la ecuación anterior, queda que la capacitancia por unidad de longitud en el dominio transformado es de la forma:

$$C = \varepsilon_o \varepsilon_r \sum_{i=2}^{3n+2n+2} \sum_{j=2}^{3n+2n+2} \left[ \sqrt{\frac{C_1 \left( u_i + \frac{\Delta}{2} \right)}{C_2 \left( v_j + \frac{\Delta}{2} \right)}} (\phi(i+1, j+1) - \phi(i, j+1) + \phi(i+1, j) - \phi(i, j))^2 + \sqrt{\frac{C_2 \left( v_j + \frac{\Delta}{2} \right)}{C_1 \left( u_i + \frac{\Delta}{2} \right)}} (\phi(i, j+1) - \phi(i, j) + \phi(i+1, j+1) - \phi(i+1, j))^2 \right] \quad (4.31)$$

## CAPITULO 5

### IMPLEMENTACIÓN

#### **5.1 Consideraciones para el número de iteraciones de la matriz de potenciales para ancho finito del sustrato**

Para poder ejecutar las simulaciones a las líneas de transmisión acopladas con sustrato de ancho infinito, se debe establecer un número total de ciclos de iteración a la matriz de potenciales. Como se espera que en las simulaciones haya una convergencia en el valor de la impedancia de las microlíneas acopladas al valor esperado por las aproximaciones numéricas dadas en las ecuaciones (2.27), es conveniente que después de cierto número de ciclos, se detengan las iteraciones.

Se decidió culminar el ciclo de iteraciones cuando el error relativo del valor de la impedancia de las microlíneas entre cada 100 ciclos de iteración sea menor al  $10^{-4}\%$ , garantizando la culminación de los ciclos cuando la curva de tendencia del valor de la impedancia se comporte como una asíntota.

Este criterio se aplicó para las tres dimensiones de matrices implementadas en las simulaciones, estas son: matriz de  $92 \times 32$ ; de  $122 \times 42$  y de  $152 \times 52$ .

#### **5.2 Consideraciones en la matriz de iteraciones para sustrato finito**

Al realizar algunas pruebas considerando la reducción del ancho del sustrato, se observó que las relaciones dimensionales de las microlíneas no se mantenían, sino que sufrían desplazamientos alrededor de su punto central. Y por tal motivo, las simulaciones realizadas con esas condiciones arrojarían resultados erróneos.

El punto central de las microlíneas es el único que mantiene su posición en la matriz de potenciales cuando ocurren cambios en el valor del ancho del sustrato, ya que este punto

central forma parte de las condiciones iniciales de la transformación espacial implementada en la estructura original para llevarla al espacio finito  $(u, v)$ . Dicho en otras palabras, este punto central siempre cumple la condición:

$$u\left(\frac{s+w}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

por lo que su lugar en la abscisa de la matriz de potenciales de tamaño  $(3N+2, N+2)$  siempre es:

$$i\left(\frac{s+w}{2}\right) = N+2 \quad (5.1)$$

La forma implementada para mantener las relaciones dimensionales de la estructura a cambios del ancho del substrato dieléctrico fue mediante la búsqueda del valor del ancho del substrato en el que los bordes de las microlíneas comenzaban a no corresponderse con las relaciones esperadas, y a partir de ese valor, reducir el tamaño de la matriz de potenciales para mantener las relaciones dimensionales de toda la geometría. Por tanto, el esquema a seguir para realizar las simulaciones con substrato finito fue el siguiente:

1. Calcular los coeficientes A, B, y a su vez, calcular la transformación de los bordes izquierdo ( $i_0$ ) y derecho ( $i_1$ ) de las microlíneas en el dominio  $(u, v)$  para el caso de substrato infinito.
2. Variar los valores de  $a$  desde  $a > 3 \cdot (s+w)$ . Calcular los coeficientes de transformación A y B, y a su vez, calcular la transformación de los bordes izquierdo ( $i_0^*$ ) y derecho ( $i_1^*$ ) de las microlíneas en el dominio  $(u, v)$ . Ir verificando que los bordes transformados para ancho finito son distintos que para ancho infinito. Cuando sean iguales ir al paso 3.
3. El ancho límite de la estructura ( $a^*$ ) será el valor del ancho encontrado en el paso 2. Por lo que se usará la transformación con los coeficientes  $A^*$ ,  $B^*$  que correspondan a este ancho límite. Esto es:  $u(a^*) = A^* \tan^{-1}[B^*(x - x_0)] + \frac{1}{2}$ .

La reducción de la matriz  $(3N+2, N+2)$  queda al tamaño  $(i_{\max}^*, N+2)$  donde:

$$i_{\max}^* = u(a^*) \cdot 2N + 2$$

### 5.3 Diagramas de flujo de los cálculos

En la figura 5.1 se muestra, a groso modo, el proceso de cálculo de las impedancias características de modo par e impar para las líneas de transmisión acopladas, dadas en geometría Stripline.

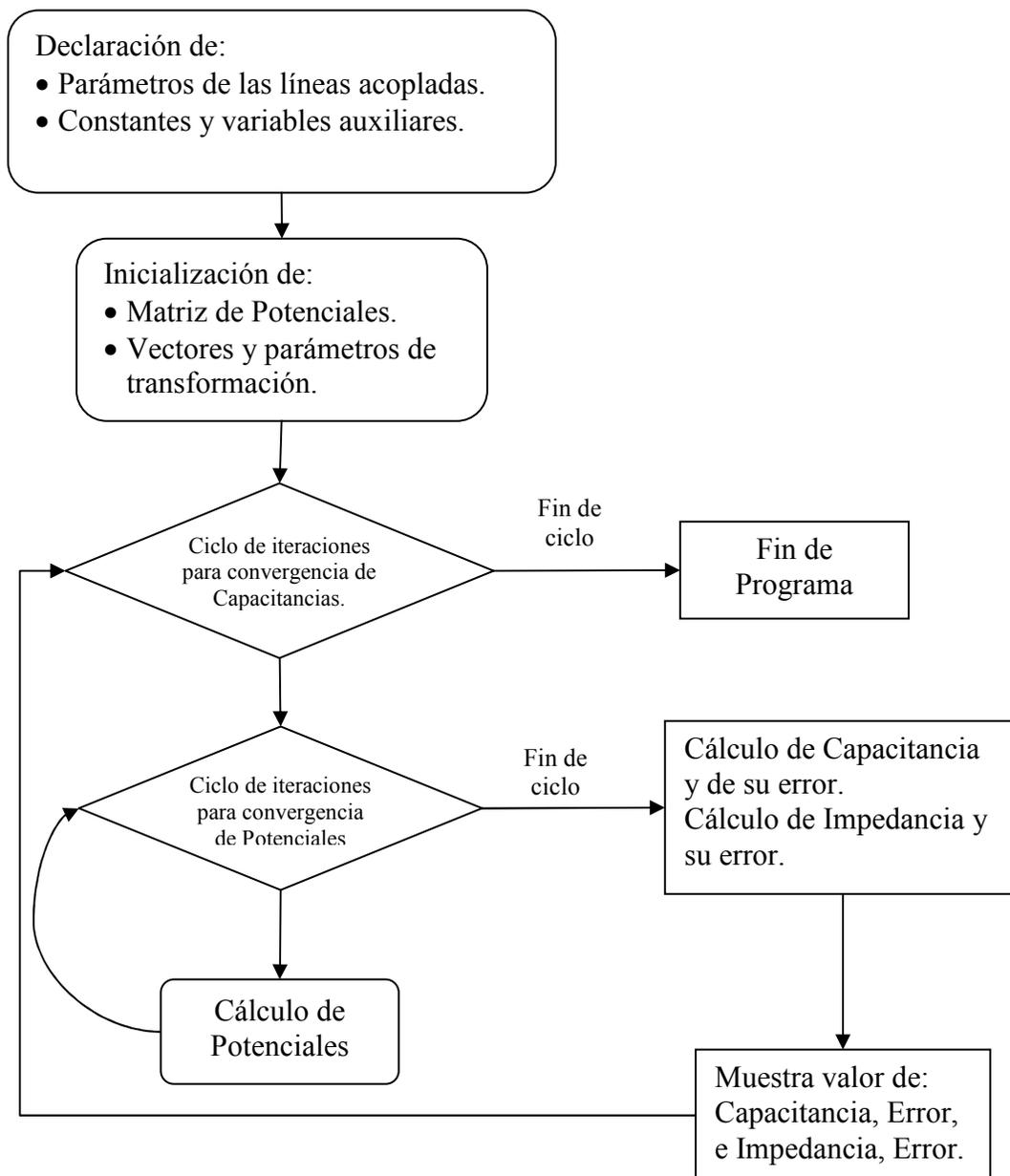


Figura 5.1: Diagrama de Flujo que representa la forma de cálculo de Impedancia de modo par e impar para microlíneas de transmisión acopladas.

En la figura 5.2 se muestra la rutina de inicialización de parámetros de transformación y matriz de potenciales, según geometría Stripline.

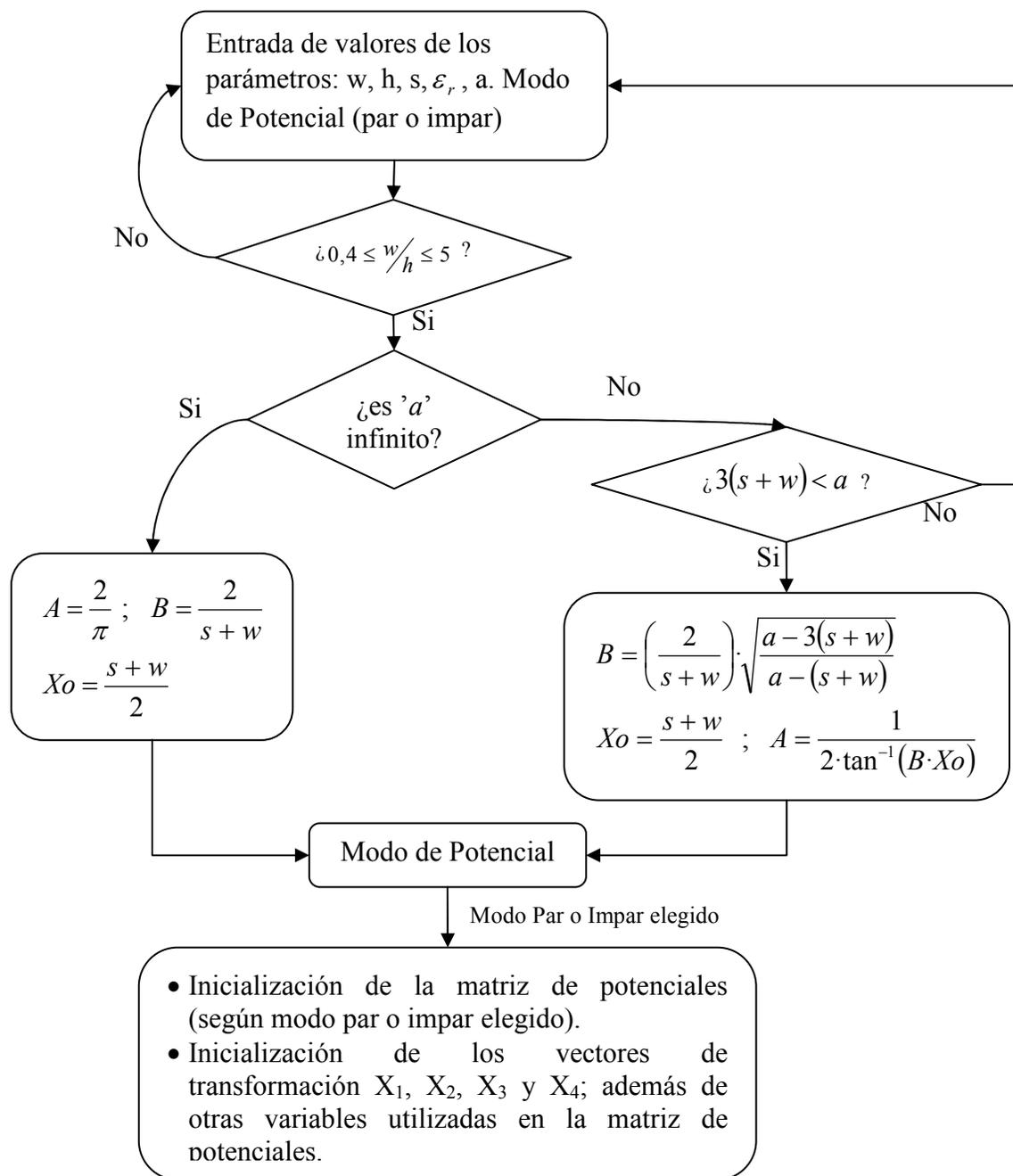


Figura 5.2: Algoritmo de inicialización de la matriz de potenciales de las microlíneas de transmisión acopladas.



En la figura 5.4 se muestra la rutina para el cálculo de la capacitancia por unidad de longitud, la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas, y sus correspondientes errores relativos, según geometría Stripline.

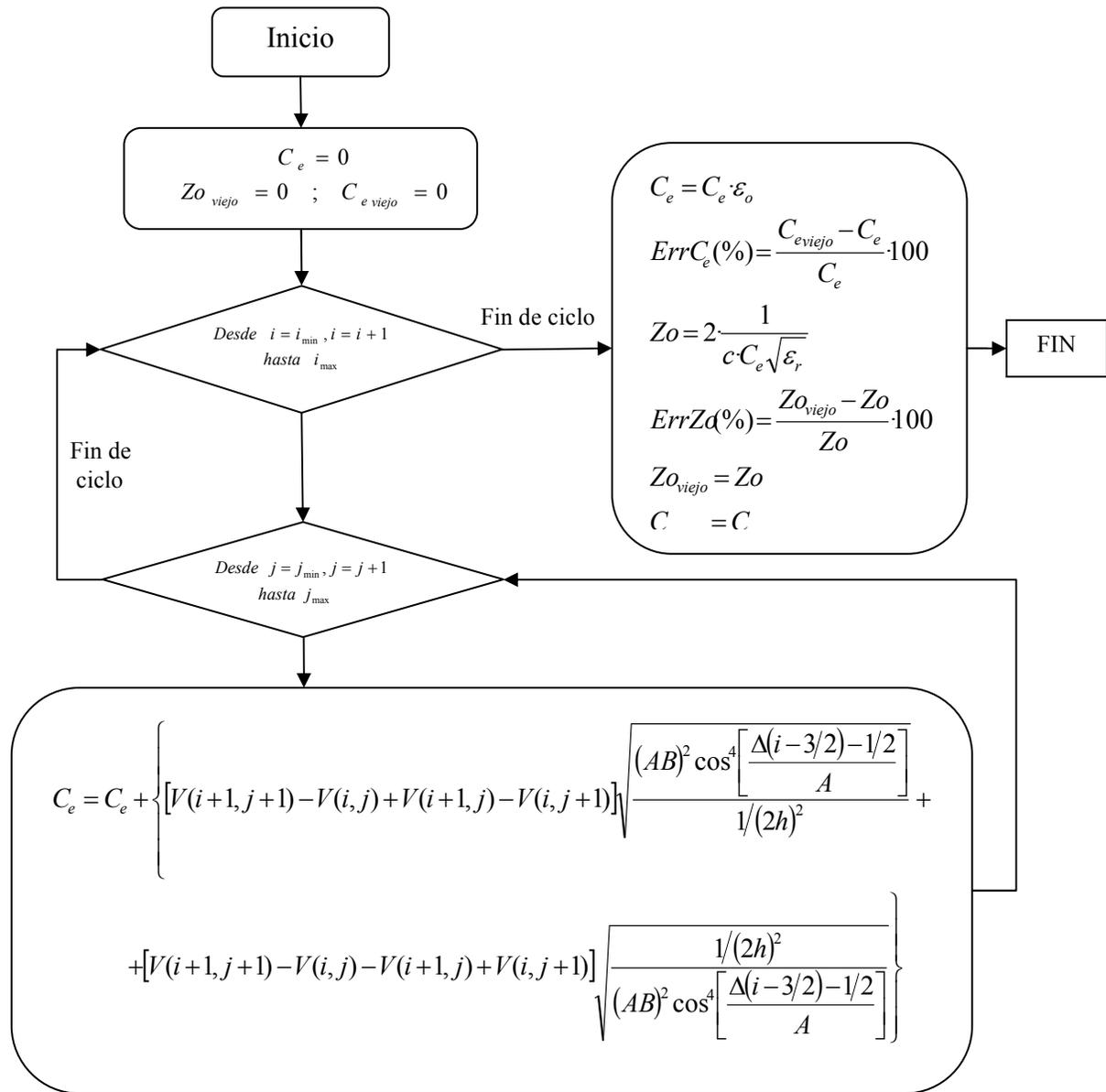


Figura 5.4: Cálculo de la capacitancia por unidad de longitud, la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas, y sus correspondientes errores relativos.

#### 5.4 Forma de inicialización de potenciales para modos par e impar

La forma de inicialización de la matriz de potenciales de las microlíneas acopladas en modo par es diferente que en modo impar. Esto se pudo observar en la forma que toman las líneas de campo eléctrico en la figura 2.3 para ambos modos de polarización.

La inicialización de potenciales para modo par es de la forma:

$$V(i, j) = \left\{ \begin{array}{l} \left( 1 - \frac{j-2}{j_{\max}-2} \right) \quad ; \quad \forall j, \quad i_{\min} \leq i \leq 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \\ \left( 1 - \frac{i - \left[ 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \right]}{i_{\max} - \left[ 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \right]} \right) \left( 1 - \frac{j-2}{j_{\max}-2} \right) ; \quad \forall j, \quad 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 < i \leq i_{\max} \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Se observa que la inicialización de la matriz de potenciales posee dos regiones, la primera región, que acapara toda la microlínea, hace tender los valores de potencial a cero en sentido vertical, y es invariante en sentido horizontal. En la segunda región existen variaciones horizontales y verticales del potencial a la vez, que hacen tender los valores de potenciales a cero en ambos sentidos. La tendencia a cero potencial (0V) en ambas regiones juntas hace cumplir las condiciones de borde de este modo de polarización y también hace que a lo largo de la microlínea exista potencial de 1V.

La inicialización de potenciales para modo impar es de la forma:

$$V(i, j) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{i-2}{\left[ 2Nu\left(\frac{s}{2}\right)+2 \right]-2} \right) \left( 1 - \frac{j-2}{j_{\max}-2} \right) ; \quad \forall j, \quad i_{\min} \leq i < 2Nu\left(\frac{s}{2}\right)+2 \\ \left( 1 - \frac{j-2}{j_{\max}-2} \right) \quad ; \quad \forall j, \quad 2Nu\left(\frac{s}{2}\right)+2 \leq i \leq 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \\ \left( 1 - \frac{i - \left[ 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \right]}{i_{\max} - \left[ 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 \right]} \right) \left( 1 - \frac{j-2}{j_{\max}-2} \right) ; \quad \forall j, \quad 2Nu\left(\frac{s}{2}+w\right)+2 < i \leq i_{\max} \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

La inicialización de la matriz de potenciales posee tres regiones, la primera y la tercera, que son zonas fuera de la microlínea, hace que el potencial varíe en sentido horizontal y vertical. Esta variación en la primera región se debe a que los potenciales de las microlíneas acopladas toman valores opuestos y debe existir una variación gradual de éste entre la distancia que los separa. Para la segunda región, o región central, sólo existe variación del potencial en sentido vertical.

Como primera aproximación, se busca que la convergencia del potencial sea más rápida bajo estas formas de inicialización, que obedecen a una manera “intuitiva” a cómo se distribuye el campo eléctrico en la estructura de las líneas de transmisión acopladas según cada modo.

### 5.5 Panel de simulación

El software empleado para realizar las simulaciones es MatLab v5.3; ya que ofrece una vasta cantidad de recursos en el manejo de matrices de grandes dimensiones. Además, como no se necesita un ambiente gráfico muy sofisticado para el usuario, MatLab ofrece lo mínimo requerido para tener un manejo amigable del software. El Panel de control se muestra en la figura 5.5.

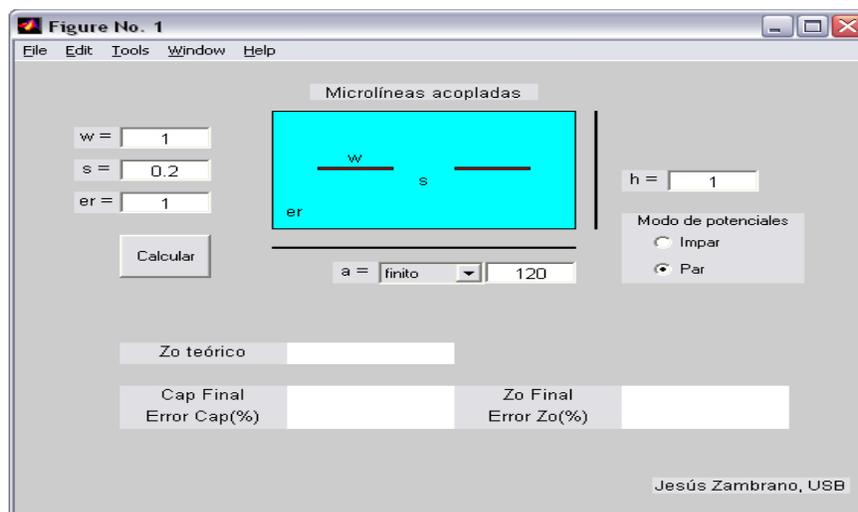


Figura 5.5: Panel de Control para realizar las simulaciones de las líneas de transmisión acopladas.

Aquí se muestra el modo de asignación de datos a las relaciones dimensionales de la estructura de líneas acopladas. Como muestra el ejemplo de la figura 5.5, se introducen valores dimensionales tales como  $w/h=1$ ;  $s/h=0,2$ ;  $a/(s+w)=100$ ,  $\epsilon_r = 1$ ; modo de polarización par. En la parte inferior del panel se muestran las casillas correspondientes al valor de la impedancia según las aproximaciones numéricas de Cohn [5] para los datos introducidos; la Capacitancia final con su error porcentual entre muestras y la Impedancia final de la simulación con el error relativo a la Impedancia teórica.

## CAPITULO 6

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones realizadas para obtener la impedancia característica de un arreglo de líneas Stripline acopladas simétricas para ambos modos de polarización; considerando sustrato de ancho infinito y finito.

Primero se presentan los resultados obtenidos de las impedancias características para sustrato infinito, en función de la separación y el ancho de las líneas, y de la altura total del sustrato dieléctrico. Adicionalmente, se incluyen los resultados de las matrices con menor error obtenido en las simulaciones, y el comportamiento de la convergencia del potencial en función de los ciclos de iteración.

Al no existir resultados experimentales de las impedancias características según sus modos de polarización, los resultados obtenidos se comparan con las aproximaciones numéricas publicadas por Cohn [5] para el caso de  $w/h \geq 0,35$  para obtener un buen punto de comparación. Antes de seguir con el análisis de resultados, es importante aclarar que la notación usada por Cohn difiere con la notación que se emplea en este trabajo. En la publicación se emplea  $h$  como la altura total del sustrato, en este trabajo se emplea de esa forma a modo de visualización en el software de simulación y al hablar de relaciones relativas, pero se utiliza como la mitad de la altura total del sustrato cuando se introduce en las ecuaciones de transformación espacial para las líneas acopladas.

#### 6.1 Impedancias características considerando sustrato infinito

La figura 6.1 y 6.2 muestran los resultados obtenidos de las impedancias en las microlíneas de transmisión acopladas, para modo par e impar, junto con los valores esperados para las impedancias. Cada valor presentado corresponde a simulaciones realizadas con la matriz que presentó menor error en su resultado.

Los resultados obtenidos para el arreglo de líneas Stripline acopladas con sustrato infinito se realizaron considerando valores de separación entre líneas relativa a la altura total del sustrato ( $s/h$ ) de  $0,05 \leq s/h \leq 0,8$ , y valores de ancho relativo a la altura total del sustrato de  $0,4 \leq w/h \leq 5$ , y un sustrato dieléctrico con permitividad relativa  $\epsilon_r = 1$ .

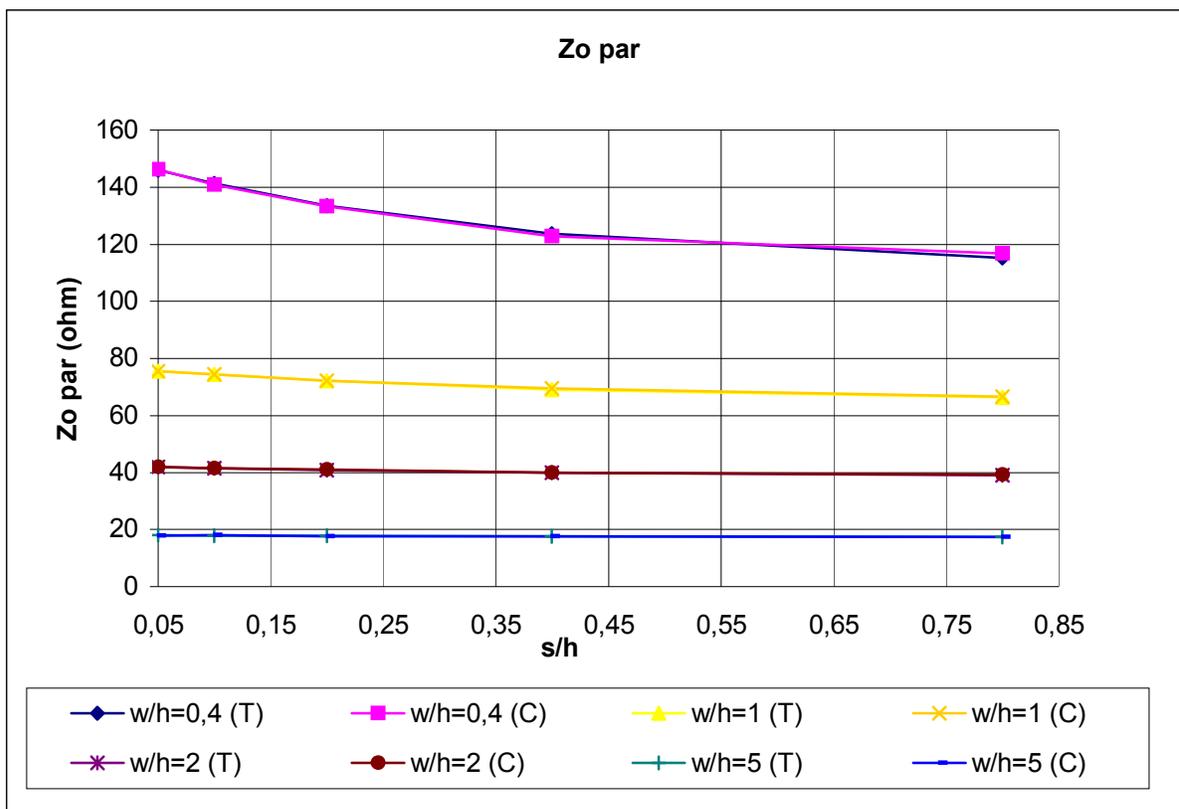


Figura 6.1: Impedancia para modo par de las microlíneas de transmisión acopladas. (T): Valor Teórico según Cohn. (C): Valor Calculado.

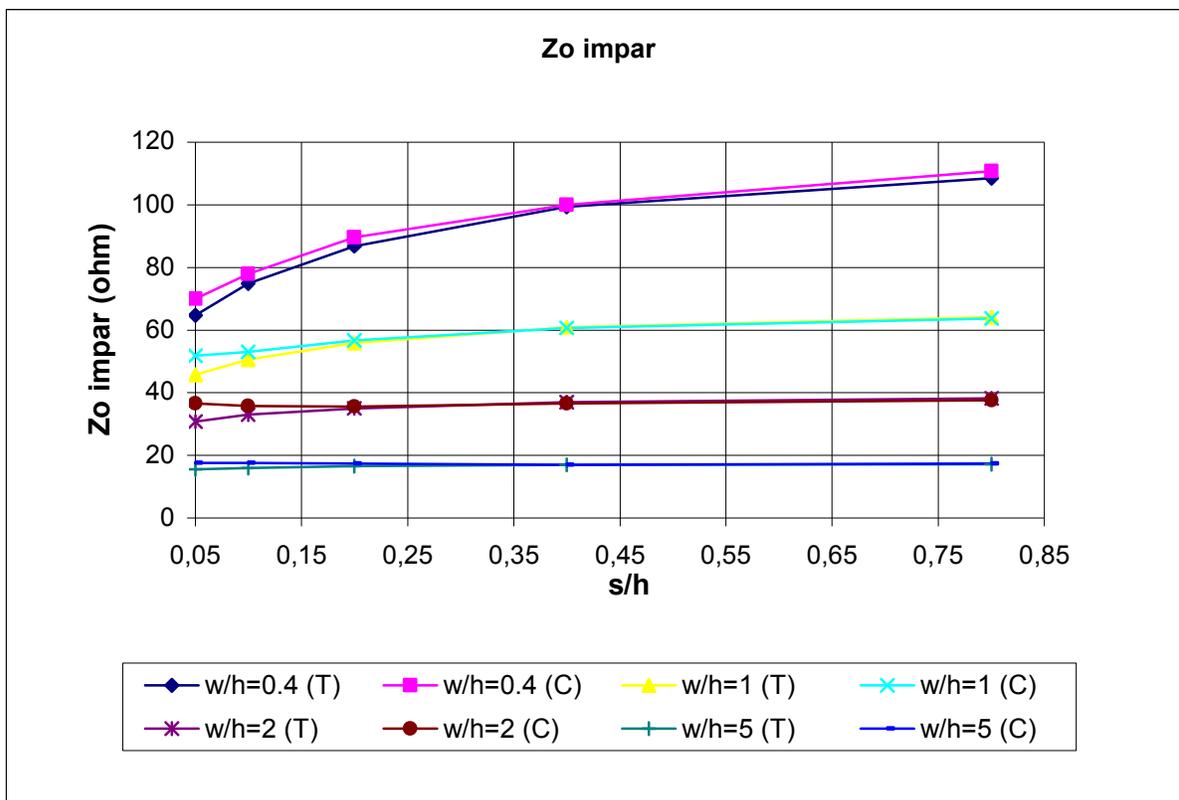


Figura 6.2: Impedancia para modo impar de las microlíneas de transmisión acopladas. (T): Valor Teórico según Cohn. (C): Valor Calculado.

### Análisis de resultados:

Tanto en la figura 6.1 como en la 6.2 se observa que el valor obtenido después de las simulaciones de los diferentes valores dimensionales de las líneas acopladas, para ambos modos de polarización, concuerdan de forma satisfactoria con los valores dados por las aproximaciones numéricas de Cohn [5].

Para la figura 6.2 se observa que las diferencias entre los valores teóricos y prácticos van disminuyendo a medida que la relación  $s/h$  aumenta, no obstante para la curva correspondiente a  $w/h = 0,4$  existe una ligera separación al final, pero por tener dimensiones de impedancia mayores habrá un error pequeño entre ambas.

### 6.1.1 Error porcentual de las impedancias características calculadas

En esta sección se muestra el error relativo entre las impedancias características calculadas, y las impedancias dadas según las aproximaciones numéricas; para ambos modos de polarización de las microlíneas, según los resultados dados por las matrices con menor error obtenido.

La fórmula usada para el cálculo del error porcentual relativo entre una impedancia calculada  $Z_{calc}$  y una impedancia teórica  $Z_{teo}$  es de la forma:

$$error(\%) = \frac{Z_{calc} - Z_{teo}}{Z_{teo}} \cdot 100 \quad (6.1)$$

La figura 6.3 y 6.4 muestra el error relativo entre las impedancias dadas por las simulaciones y la impedancia dada por Cohn [5], para modo par e impar, usando las matrices con menor error obtenido.

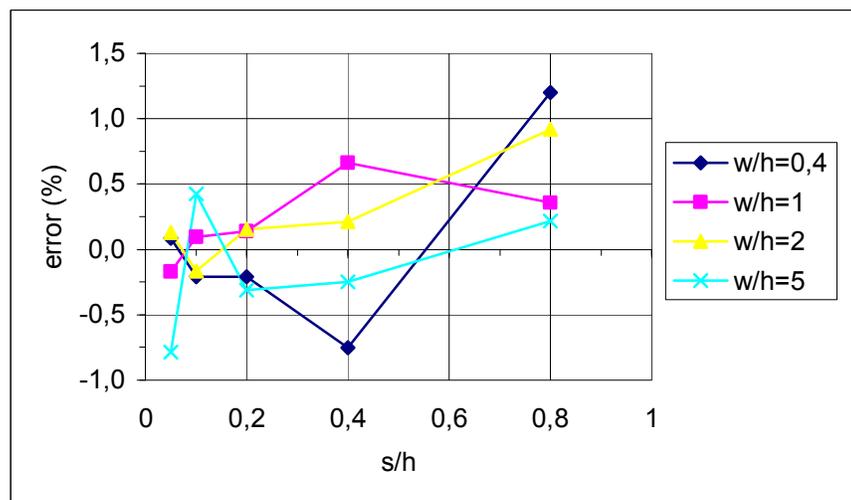


Figura 6.3: Error relativo entre la impedancia de las simulaciones y la impedancia de Cohn, para modo par.

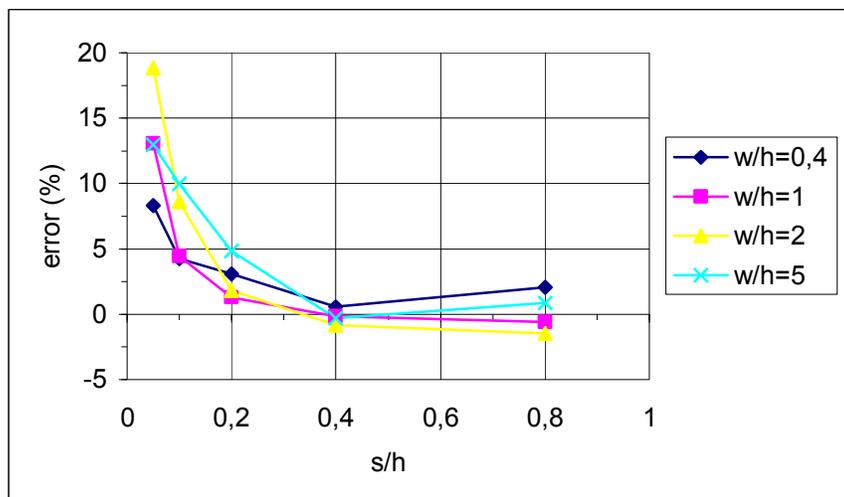


Figura 6.4: Error relativo entre la impedancia de las simulaciones y la impedancia de Cohn, para modo impar.

#### **Análisis de resultados:**

De la figura 6.3 se observa que el mayor error cometido al calcular la impedancia característica, para distintas relaciones dimensionales, es menor al 1,5%. Sin embargo, no es posible ordenar los casos simulados de acuerdo al error obtenido ya que se solapan unos con otros.

Para el modo impar, figura 6.4, el error alcanza un valor de hasta un 18%; además, se observa que para este modo de polarización, el error relativo aumenta significativamente cuando la separación relativa entre las líneas es menor a 0,2; acentuándose este error para microlíneas con ancho relativo de 1, 2 y 5; por lo que los tamaños de matriz tomados para realizar las iteraciones de los potenciales del arreglo según esas relaciones dimensionales no fueron suficientes como para adjudicar una basta cantidad de puntos a la región entre las líneas de transmisión, que en modo impar sufre un cambio de potencial de -1V a 1V. Para una separación relativa mayor a 0,2 el error absoluto máximo obtenido es menor al 5%.

### 6.1.2 Matrices de menor error obtenido

Para cada geometría específica de líneas acopladas estudiada, según el modo de polarización, y dados los resultados obtenidos con la variación hecha en el tamaño de la matriz de iteración de potenciales; se obtuvo la tabla 6.1, que muestra la matriz con menor error obtenido desde los tres tamaños de matriz de potenciales probados para las simulaciones; donde el número 30 denota a una matriz (92x32), el 40 denota a una matriz (122x42) y el 50 denota a una matriz (152x52).

	modo par				modo impar			
	w/h				w/h			
s/h	0,4	1	2	5	0,4	1	2	5
0,05	50	30	50	30	D	D	D	D
0,1	50	30	30	50	50	40	D	D
0,2	40	50	30	40	40	30	40	50
0,4	40	50	50	40	50	30	30	50
0,8	30	50	50	30	30	40	30	30

Tabla 6.1: Matriz de menor error cometido en las simulaciones para sustrato de ancho infinito, para modo par e impar. D = (Descartado). No Estimado para las simulaciones con sustrato de ancho finito.

La tabla anterior muestra que no es posible extrapolar el tamaño de una matriz que presenta menos error relativo - para unas dimensiones específicas - hacia sus zonas dimensionales cercanas, y así obtener un comportamiento global del tamaño de la matriz de potenciales en las diversas regiones dimensionales del arreglo según el menor error relativo obtenido.

Las celdas identificadas con D (Descartado), no son tomadas en cuenta para las posteriores pruebas hechas de la estructura con sustrato finito, debido a los errores elevados que presentaron en los resultados de las simulaciones para sustrato de ancho infinito. Para una separación relativa de líneas de 0,05 el error alcanza magnitudes

mayores a 7,5% en modo impar; de la misma forma que lo hacen las líneas separadas a 0,1 y con ancho relativo de 2 y 5.

Ya que se descartaron los arreglos dimensionales anteriores bajo modo impar para las pruebas de sustrato de ancho finito, también se descartan estas mismas dimensiones bajo modo par. Con ello se simulan arreglos dimensionales con sustrato de ancho finito que posean impedancia par e impar con error menor al 5% para sustrato de ancho infinito.

### 6.1.3 Número de iteraciones para convergencia de impedancias

En esta sección se mostrará la forma de convergencia de las impedancias para ambos modos de polarización según la cantidad de ciclos de iteraciones para diversos tamaños de matrices. Los ciclos de iteraciones mostrados en las figuras 6.5 a 6.10 culminan cuando el error relativo entre valores de impedancias para cada 100 ciclos de iteración es menor a  $10^{-4}\%$ . De la figura 6.5 a la 6.7 se muestra la convergencia de la impedancia en modo par para tres dimensiones de matrices de potenciales, y para distintas relaciones dimensionales en función del número de ciclos.

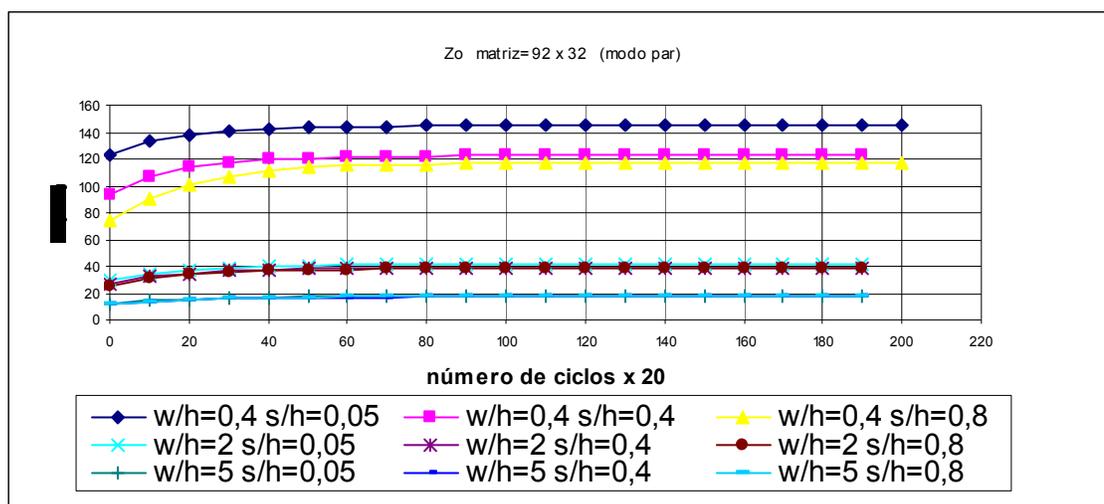


Figura: 6.5: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (92x32)

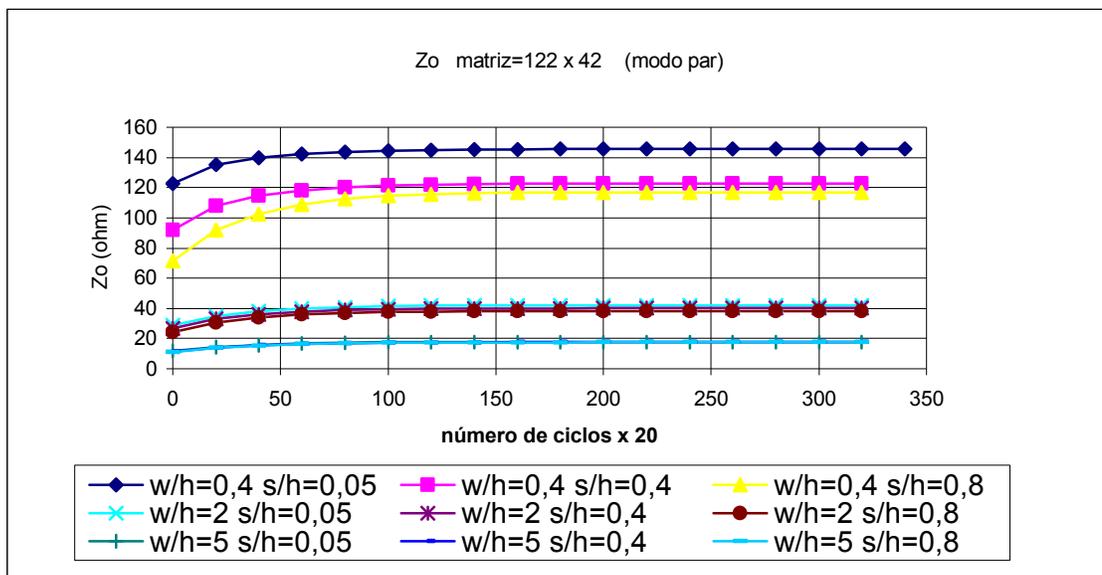


Figura: 6.6: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (122x42)

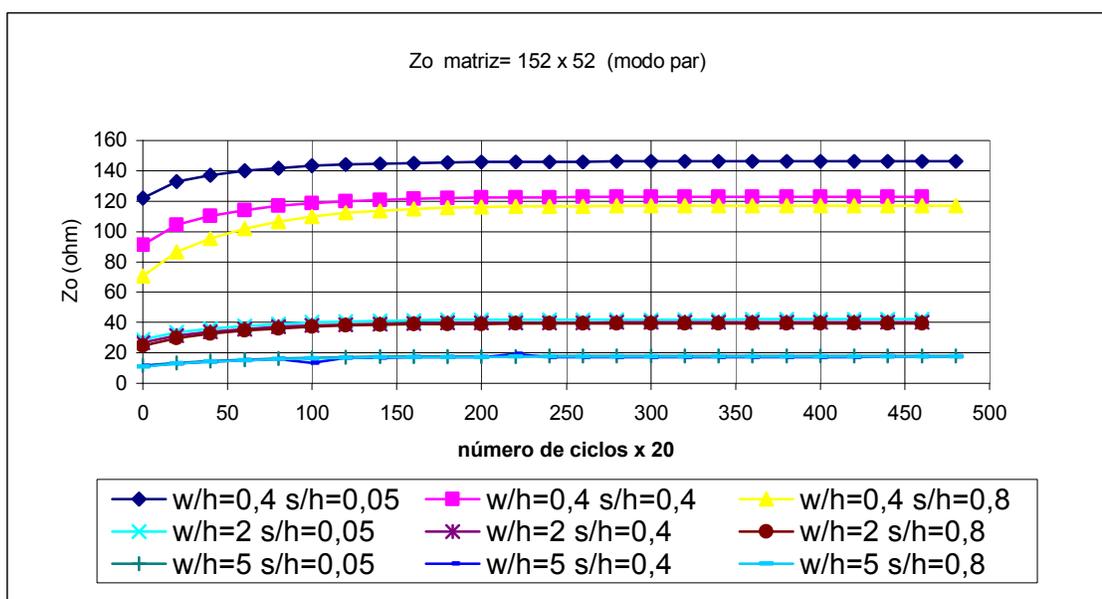


Figura: 6.7: Impedancia en modo par en función del número de ciclos, con una matriz (152x52)

De la figura 6.8 a la 6.10 se muestra la convergencia de la impedancia en modo impar para tres dimensiones de matrices de potenciales, y para distintas relaciones dimensionales.

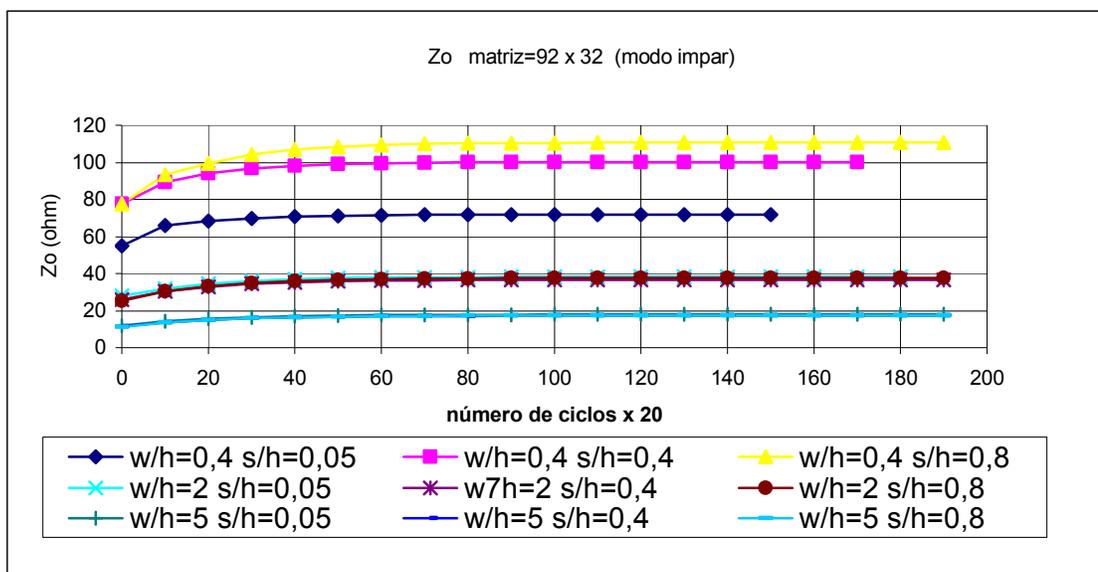


Figura: 6.8: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos, con una matriz (92x32)

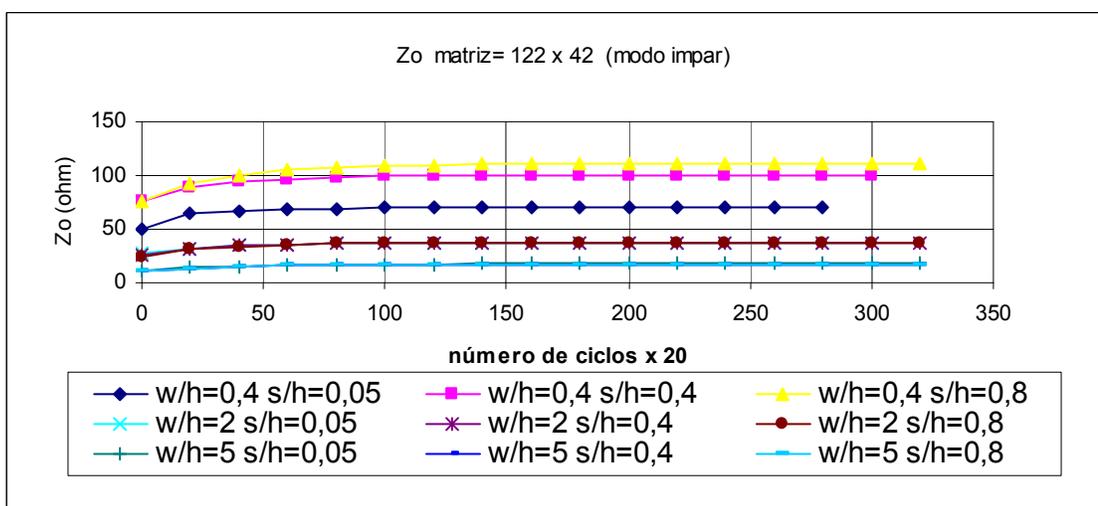


Figura: 6.9: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos, con una matriz (122x42)

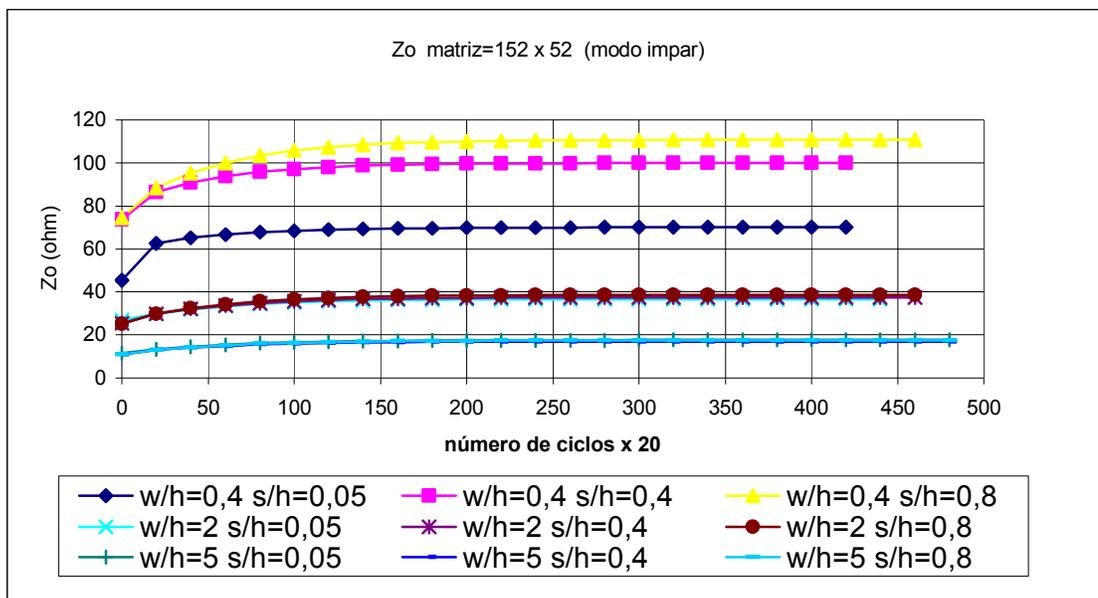


Figura: 6.10: Impedancia en modo impar en función del número de ciclos de iteración, con una matriz (152x52)

### Análisis de resultados:

Se observa además, el comportamiento asintótico de los resultados de las simulaciones a medida que avanzan los ciclos de iteración. Por otra parte, al hacer simulaciones con una matriz de potenciales variando las relaciones dimensionales de la estructura, algunos resultados tardan más ciclos de iteración que otros. Por lo que se decidió tomar un número de ciclos igual para cada dimensión de matriz tomando como referencia a los ciclos que más tardaron en finalizar, el número de ciclos asignado fue: para matrices de (92x32) de 4.000 ciclos, para matrices de (122x42) de 6.800 ciclos, y para matrices de (152x52) de 10.000 ciclos.

## 6.2 Impedancia característica considerando substrato finito

En esta sección se mostrará los resultados de las simulaciones de las microlíneas acopladas para ancho finito del substrato. La dimensión de la matriz de potenciales empleada para la simulación de la estructura con variación del ancho del substrato corresponde a la dada por la Tabla 6.1, que considera la matriz con menor error cometido en las simulaciones de substrato con ancho infinito.

Las figuras 6.11 a la 6.14 muestran el error relativo entre la Impedancia de las microlíneas con substrato finito y la impedancia con substrato infinito, para modo par de polarización.

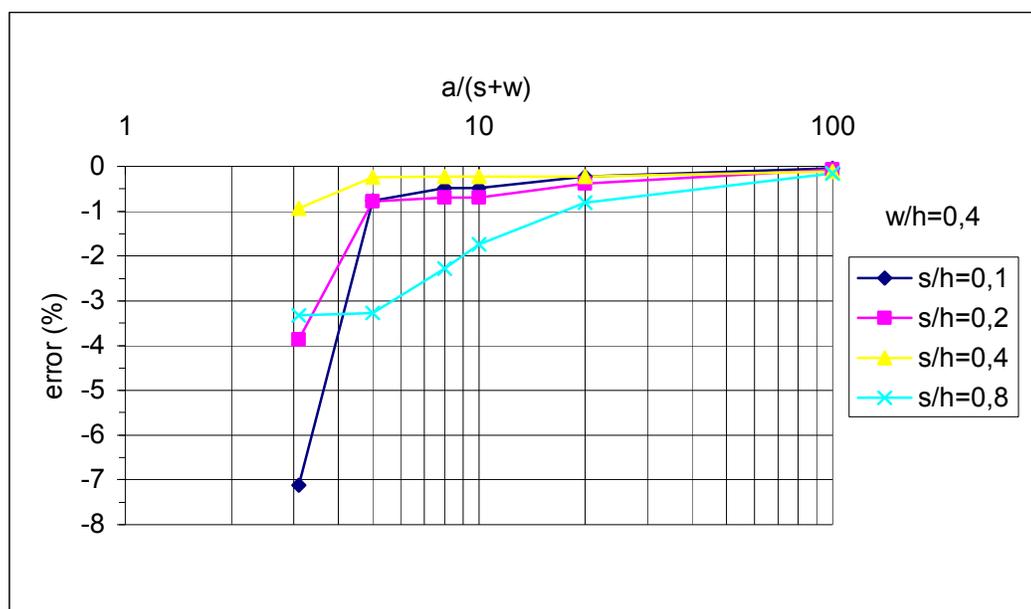


Figura 6.11: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo par con  $w/h = 0,4$ .

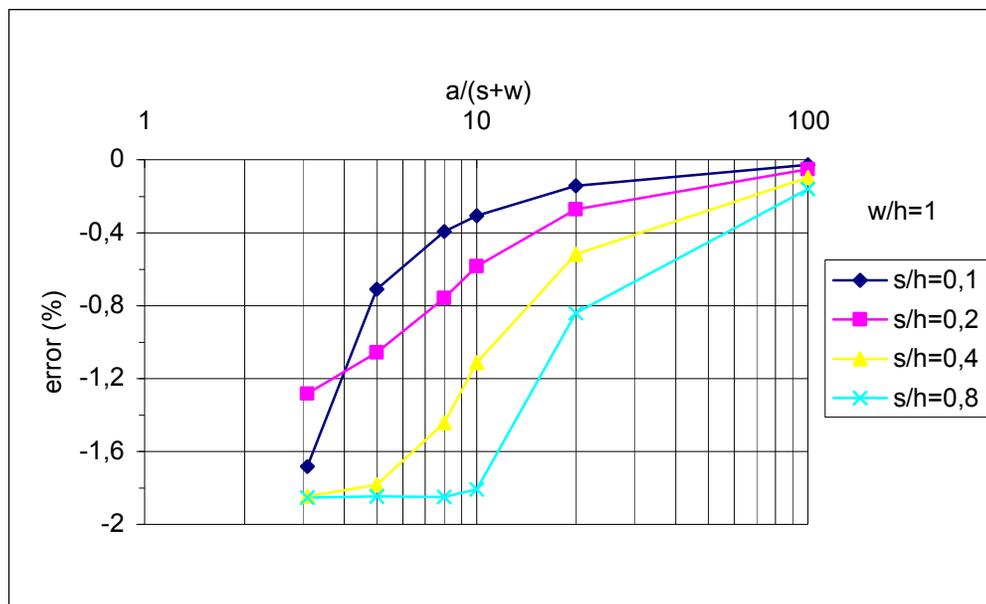


Figura 6.12: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo par con  $w/h = 1$ .

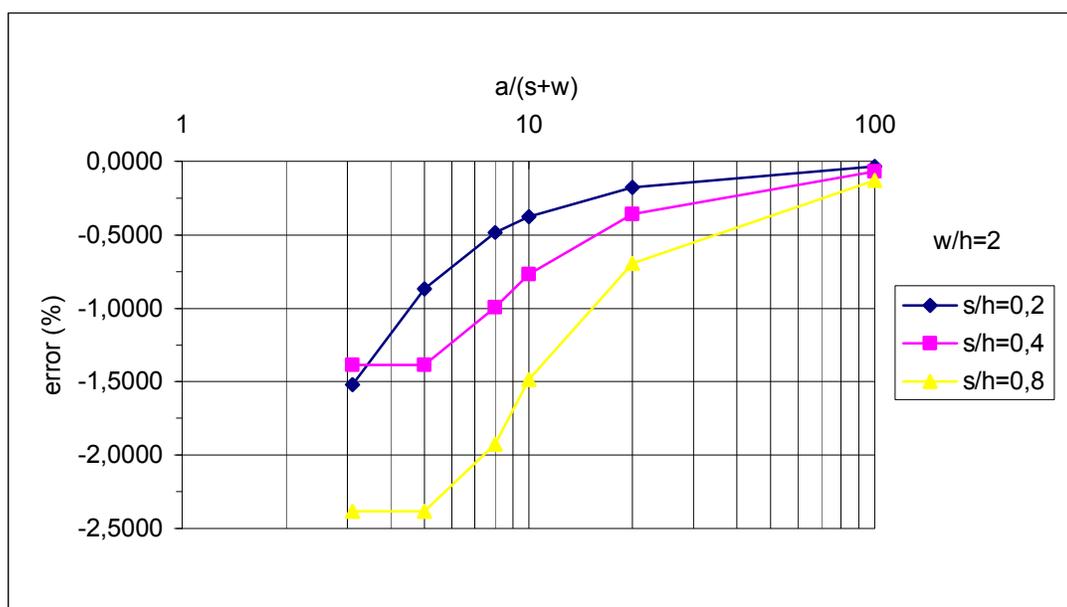


Figura 6.13: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo par con  $w/h = 2$ .

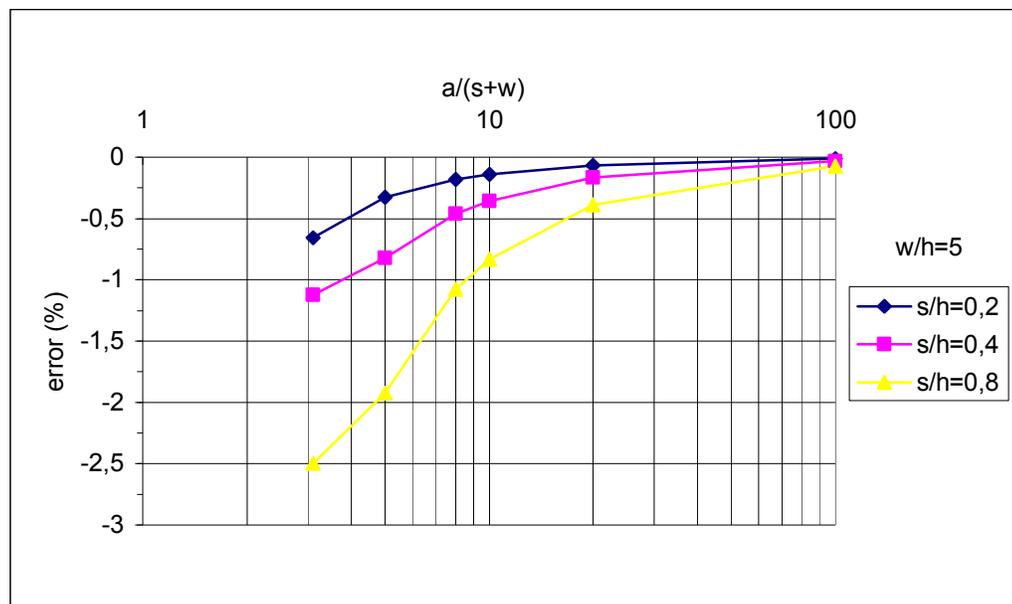


Figura 6.14: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo par con  $w/h = 5$ .

Las figuras 6.15 a la 6.18 muestran el error relativo entre la Impedancia de las microlíneas con substrato finito y la impedancia con substrato infinito, para modo impar de polarización.

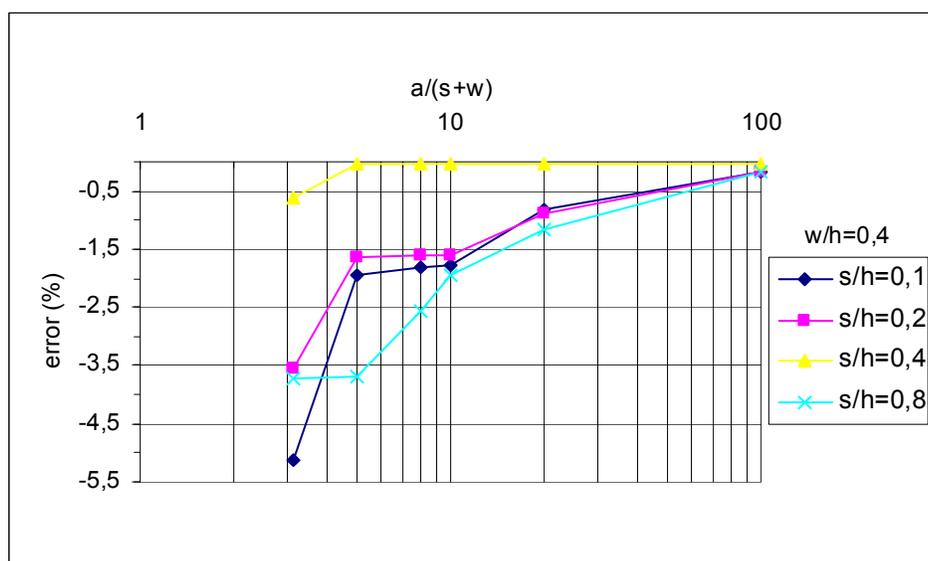


Figura 6.15: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con  $w/h = 0,4$ .

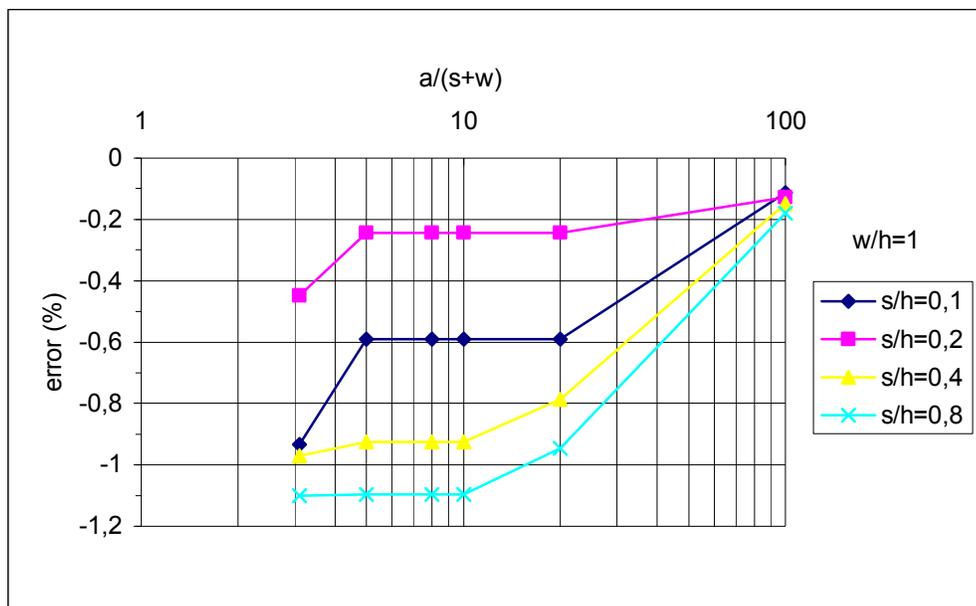


Figura 6.16: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con  $w/h = 1$ .

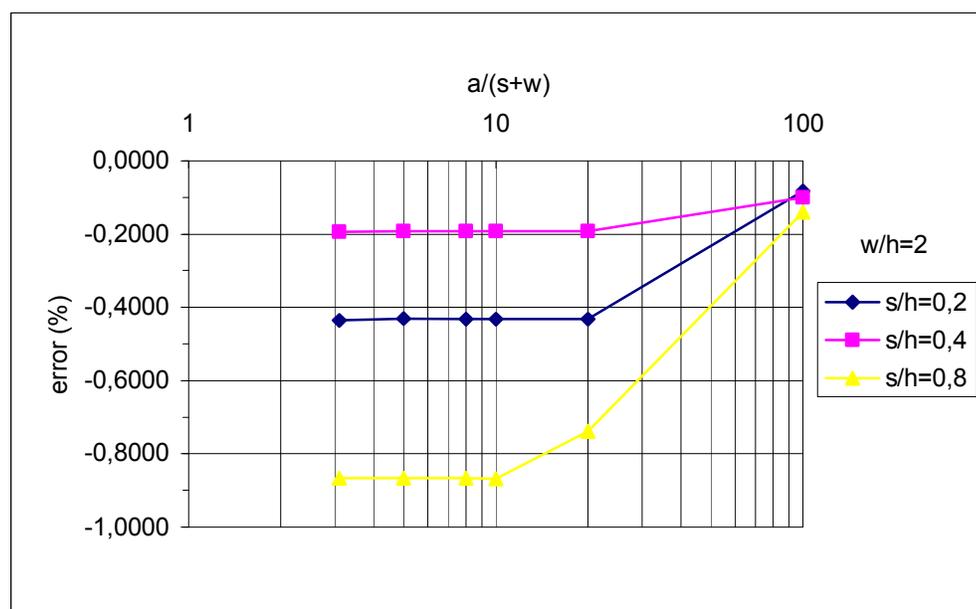


Figura 6.17: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con  $w/h = 2$ .

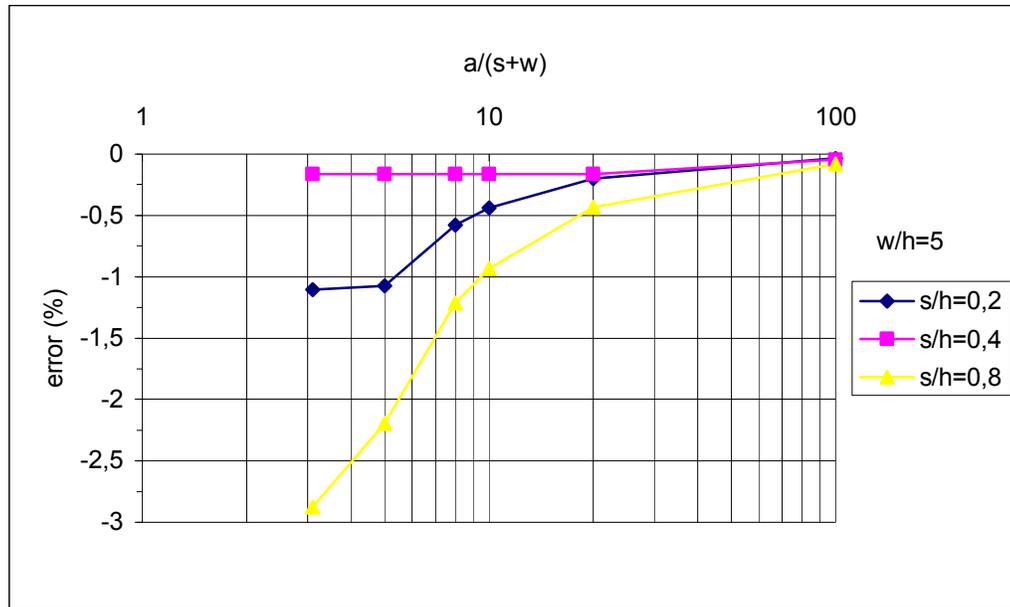


Figura 6.18: Error relativo entre Impedancia de las microlíneas con substrato finito e Impedancia de las microlíneas con substrato infinito, para modo impar con  $w/h = 5$ .

### Análisis de resultados:

De las figuras 6.11 a 6.14 se observa que la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas con ancho de substrato finito en modo par es menor que para la misma estructura pero con ancho de substrato infinito, y a medida que aumenta la relación  $a/(s+w)$  la primera impedancia converge a la segunda. Por otra parte, para las figuras 6.12 a 6.14; donde la relación  $w/h$  es mayor a 0,4; se observa que a medida que  $w/h$  aumenta, la curva de tendencia más rápida es la de relación  $s/h$  menor.

Para la curva 6.11 no se observa claramente este comportamiento ya que los valores del ancho y la separación relativas de las microlíneas son semejantes, aunque en esta figura se visualiza que la curva de  $s/h=0,1$  converge más rápido que la curva de  $s/h=0,2$ .

Para las cuatro figuras anteriores, la curva de convergencia más lenta siempre es la correspondiente a  $s/h=0,8$ . Además, para valores de  $a/(s+w)$  mayores a 20, el módulo del error relativo es menor al 1%.

Para las curvas 6.15 a 6.18 se observa que la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas con ancho de sustrato finito es menor que para la misma estructura pero con ancho de sustrato infinito, y a medida que aumenta la relación  $a/(s+w)$  la primera impedancia converge a la segunda. Para las cuatro figuras anteriores, la curva de convergencia más lenta es la correspondiente a  $s/h=0,8$ .

Las curvas de las figuras 6.16 a 6.18 no convergen tan suavemente como lo hacen sus similares en polarización par (figuras 6.12 a 6.14), aunque se mantienen separadas para valores de  $a/(s+w)$  pequeños. También se observa que para valores de  $w/h$  mayores a 1, la disminución del ancho del sustrato afecta más a las líneas que posean mayor separación entre ellas (más alejadas del centro de la estructura).

## CAPITULO 7

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se calculó la impedancia característica de los modos par e impar de líneas Stripline acopladas simétricas en función del ancho de los conductores, de la separación entre éstos, y de la altura y el ancho del sustrato dieléctrico, utilizando una Compresión Espacial para obtener un dominio acotado de proporciones que facilitan la aplicación del método de Diferencias Finitas para el cálculo numérico del potencial electrostático normalizado en la sección transversal de la estructura y para el cálculo de las capacitancias por unidad de longitud requeridas para el cálculo de las impedancias.

Se desarrolló un programa en MatLab v. 5.3 para realizar las simulaciones. Se estudió el comportamiento del error entre las impedancias calculadas y las impedancias teóricas para líneas de sustrato de ancho infinito, para distintas combinaciones de dimensiones y de tamaños de matriz de potenciales, lo cual permitió establecer los tamaños de matrices que dan el menor error para cada una de las combinaciones de soluciones utilizadas. También se estudió el comportamiento de la convergencia de las impedancias de líneas de sustrato de ancho infinito en función del número de iteraciones del algoritmo; y de líneas de sustrato de ancho finito en función de la variación del éste.

Los resultados obtenidos para líneas de transmisión acopladas simétricas en geometría Stripline para ancho de sustrato infinito, concuerdan bastante bien con los resultados dados por Cohn en diversas publicaciones según sus aproximaciones numéricas. Seleccionando las matrices con menor error obtenido, el máximo error presentado por ellas para el modo par de polarización no fue mayor al 2,2%; en cambio; para el modo impar dicho error alcanzó valores elevados, sobre todo cuando la separación relativa entre líneas era menor a 0,2; cuyo error relativo alcanzaba valores de hasta un 18%.

Por otra parte, las simulaciones realizadas con líneas de sustrato finito confirmaron que las impedancias éstas convergen a las impedancias de las líneas con sustrato infinito, ratificando

la hipótesis que dio inicio a este trabajo, de que el ancho del sustrato dieléctrico modificaba el valor de la impedancia característica de las líneas de transmisión acopladas simétricas. De igual manera, tales resultados validan tanto la forma de cálculo realizada en la matriz de potenciales como las consideraciones tomadas en cuanto a la variación de sus dimensiones.

El análisis de la forma de convergencia de la impedancia característica realizada a cada una de las simulaciones en las microlíneas acopladas muestra que el método de iteración es convergente. Por otra parte, dicha convergencia depende directamente tanto de la discretización seleccionada para la estructura, como del valor de los parámetros dimensionales que ésta posea (altura, separación y ancho relativo de las microlíneas).

Debido a las diversas variables de las que depende la convergencia de la impedancia de las microlíneas, no fue posible obtener un criterio para determinar el mejor tamaño de matriz de potenciales para ciertas regiones dimensionales de la estructura, para cada modo de polarización, y así poder obtener un patrón para las simulaciones y minimizar el error que éstas proporcionen.

Se evidencia que a medida que el tamaño de la matriz de potenciales aumenta, la rapidez de convergencia de potenciales disminuye, no con esto se puede decir que los resultados obtenidos con matrices de dimensiones mayores proporcionarán errores relativos menores.

Con los resultados obtenidos en el capítulo 5 se cumplió el objetivo general del proyecto: analizar la variación de la impedancia característica de las microlíneas acopladas tanto para modo par como impar, sometidas a variaciones en el ancho del sustrato dieléctrico.

Además, para el estudio de este tipo de geometría de las microlíneas queda validado el método propuesto, basado en la utilización del método de diferencias finitas con transformación espacial no lineal.

Como posible continuación a la investigación de la variación de la impedancia característica de las microlíneas acopladas, se sugiere realizar pruebas de simulación con matrices de

mayores dimensiones para los casos en que se obtuvo mayor error. También puede probarse modificando las ecuaciones de transformación espacial para obtener mayor resolución en la región  $0 < x < s/2$  (región de separación entre las líneas), en el dominio transformado. Con esto es posible ampliar el rango de simulaciones y obtener valores de impedancia con otras relaciones dimensionales, ya que al tener mayor resolución podría probarse con rangos de separación entre líneas aún más pequeños.

Por otra parte, realizar el programa de simulaciones en Matlab v. 5.3 fue una buena elección para trabajar con arreglos matriciales grandes, y también con las operaciones matemáticas y lógicas que estos implicaban; además, el modo de implementación del código y de la ejecución del programa no presentó mayores dificultades. Aunque si convendría trabajar con computadoras con buen procesador matemático para agilizar los procesos de simulación y abarcar un mayor número de pruebas en menor tiempo.

Finalmente, como punto experimental de partida, se sugiere la fabricación de prototipos de líneas de transmisión acopladas con geometría Stripline, para obtener valores experimentales que sirvan de comparación y validación de los resultados de simulaciones aquí logrados.

También se sugiere estudiar otros tipos de geometría, tales como la geometría Microstrip, la cual posee permitividad variable con respecto a la altura de la región transversal, y la geometría "Broadside", en la que el par de microlíneas acopladas se disponen una sobre la otra, dejando una separación entre ellas.

Es por los experimentos y por el análisis teóricos de otras geometrías, que este trabajo abre el camino hacia diversas investigaciones; buscando un campo más amplio de validación del método propuesto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] COLLIN, R. E.: “Foundations for Microwave Engineering”, McGraw-Hill, New York, Capítulo 3, 1966.
- [2] JOHNK, C. T. A.: “Engineering Electromagnetics Field and Waves”, J. Wiley & Sons, New York, 1975.
- [3] JONES, E. M. T. and J. T. Bolljahn: “Coupled Strip Transmission Line Filters and Directional Couplers”, IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1956, p.75-81.
- [4] SATO R. and E. G. Cristal; “Simplified Analysis of Coupled Transmission Line network”, IEEE MTT-18, 1970, pp 122-131.
- [5] COHN, S. B.: “Shielded Coupled-Strip Transmission Line”, IRE Trans. On Microwave Theory and Techniques, pp. 29-38, Oct. 1955.
- [6] BROWN R. G., R. A. Sharpe, W. L. Hughes and R. E. Post: “Lines, Waves and Antennas”, John Wiley and Sons, Inc., United State of America, 1973.
- [7] R. C. Honey, Stanford Research Institute, Private Communications.
- [8] SUCRE O. and D. Suster: “Finite-Difference of the Transverse Laplace Equation in Unbounded Planar Transmission Lines”, IEE Computation in Electromagnetics, Conference Publication No. 420, April 1996, pp. 259-264.
- [9] SUCRE O. y D. Suster: “Solución de Problemas de Contorno Bidimensionales Ilimitados usando el Método de Diferencias Finitas”, Métodos Numéricos y Simulaciones en Ingeniería, 1996, pp. 61-68.
- [10] HOFFMANN, R. K.: “Handbook of Microwave Integrated Circuits”, Artech House INC, 1987.
- [11] HOWE, H. Jr.: “Stripline Circuit Design”, Artech House Inc, 1974.
- [12] SUSTER D.: “Estudio de la variación de la impedancia característica de microlíneas en función del ancho del substrato dieléctrico”, Proyecto de Grado, Universidad Simón Bolívar, Venezuela, Junio, 1995.
- [13] CHENG, D. K.: “Field and Waves Electromagnetics”, Edit. Alfa-Omega.

- [14] GUPTA, K. C., R. Garg and I. J. Bahl: "Microstrip Lines and Slot Lines", Artech House, Massachusetts, 1979.
- [15] DWORSKY, L. N.: "Modern Transmission Line Theory and Applications", John Wiley & Sons, Estados Unidos, 1979.
- [16] CHURCHILL, R. V.: "Teoría de Funciones de Variable Compleja", McGraw-Hill, España, 1966, pp. 174-177.

## APENDICE

Tablas de resultados de simulaciones de las líneas de transmisión con ancho infinito de substrato, con matrices de menor error obtenido.

Modo Par:

s/h	w/h					
	0,4			1		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,05	146,0471	146,1747	0,0874	75,6435	75,5145	-0,1705
0,1	141,2127	140,9184	-0,2084	74,3255	74,3956	0,0943
0,2	133,5120	133,2296	-0,2116	72,1357	72,2366	0,1400
0,4	123,6296	122,6981	-0,7535	69,1492	69,6081	0,6637
0,8	115,3123	116,6944	1,1986	66,4677	66,7059	0,3584

s/h	w/h					
	2			5		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,05	41,9441	41,9986	0,1300	17,9516	17,8100	-0,7888
0,1	41,5357	41,4662	-0,1673	17,8764	17,9523	0,4246
0,2	40,8428	40,9061	0,1551	17,7468	17,6917	-0,3104
0,4	39,8679	39,9521	0,2112	17,5602	17,5169	-0,2467
0,8	38,9617	39,3193	0,9179	17,3821	17,4201	0,2184

Modo Impar:

s/h	w/h					
	0,4			1		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,05	64,7018	70,0950	8,3354	45,8120	51,7933	13,0560
0,1	74,8101	77,9804	4,2378	50,6586	52,9201	4,4643
0,2	86,8564	89,5524	3,1040	55,9094	56,6273	1,2840
0,4	99,3267	99,8930	0,5701	60,8251	60,7435	-0,1341
0,8	108,4478	110,7159	2,0914	64,1279	63,7393	-0,6060

s/h	w/h					
	2			5		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,05	30,8170	36,6238	18,8430	15,5488	17,5690	12,9928
0,1	32,9366	35,7815	8,6374	16,0706	17,6735	9,9738
0,2	35,0786	35,7166	1,8187	16,5641	17,3686	4,8568
0,4	36,9523	36,6524	-0,8115	16,9704	16,9218	-0,2866
0,8	38,1458	37,5838	-1,4734	17,2179	17,3678	0,8708

Tablas de resultados de simulaciones de las líneas de transmisión con ancho infinito de substrato, con las tres dimensiones de matrices.

Modo Par:

w/h	n=30								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	146,0471	144,9082	-0,7798	141,2127	140,1540	-0,7497	133,5120	134,5176	0,7532
1	75,6435	75,5145	-0,1705	74,3255	74,3956	0,0943	72,1357	70,9992	-1,5755
2	41,9441	41,3440	-1,4307	41,5357	41,4662	-0,1673	40,8428	40,9061	0,1551
5	17,9516	17,8100	-0,7888	17,8764	17,6426	-1,3078	17,7468	17,8143	0,3801

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	123,6296	122,5301	-0,8894	115,3123	116,6944	1,1986
1	69,1492	68,1809	-1,4003	66,4677	67,0948	0,9435
2	39,8679	39,0632	-2,0184	38,9617	38,2513	-1,8232
5	17,5602	17,1833	-2,1464	17,3821	17,4201	0,2184

w/h	n=40								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	146,0471	145,6992	-0,2382	141,2127	141,6325	0,2973	133,5120	133,2296	-0,2116
1	75,6435	75,1538	-0,6473	74,3255	73,5814	-1,0012	72,1357	72,4849	0,4841
2	41,9441	42,1383	0,4630	41,5357	41,2329	-0,7290	40,8428	40,3530	-1,1992
5	17,9516	17,8233	-0,7148	17,8764	18,0233	0,8218	17,7468	17,6917	-0,3104

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	123,6296	122,6981	-0,7535	115,3123	116,9036	1,3800
1	69,1492	68,2577	-1,2892	66,4677	65,8509	-0,9279
2	39,8679	40,1369	0,6747	38,9617	38,3041	-1,6877
5	17,5602	17,5169	-0,2467	17,3821	17,4463	0,3691

w/h	n=50								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	146,0471	146,1747	0,0874	141,2127	140,9184	-0,2084	133,5120	134,1890	0,5172
1	75,6435	75,9604	0,4190	74,3255	74,1436	-0,2447	72,1357	72,2366	0,1400
2	41,9441	41,9986	0,1300	41,5357	41,7515	0,5195	40,8428	40,7288	-0,2791
5	17,95161	17,8313	-0,6702	17,8764	17,9523	0,4246	17,7468	17,6217	-0,7048

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	123,6296	122,7975	-0,6731	115,312	117,0297	1,4893
1	69,1492	69,6081	0,6637	66,4677	66,7059	0,3584
2	39,8679	39,9521	0,2112	38,9617	39,3193	0,9179
5	17,5602	17,3379	-1,2659	17,3821	17,4617	0,4577

## Modo Impar:

w/h	s/h								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	64,7018	71,8979	11,1219	74,8101	78,8071	5,3429	86,8564	92,0831	6,0177
1	45,8120	58,1976	27,0356	50,6586	55,9250	10,3959	55,9094	56,6273	1,2840
2	30,8170	38,2236	24,0343	32,9366	38,3843	16,5399	35,0786	37,1998	6,0470
5	15,5488	17,9835	15,6586	16,0706	17,8214	10,8944	16,5641	17,9511	8,3734

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	99,3267	100,3073	0,9872	108,4478	110,7159	2,0914
1	60,8251	60,7435	-0,1341	64,1279	65,1809	1,6420
2	36,9523	36,6524	-0,8115	38,1458	37,5838	-1,4734
5	16,9704	17,3369	2,1594	17,2179	17,3678	0,8708

w/h	s/h								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	64,7018	70,4355	8,8617	74,8101	79,9253	6,8376	86,8564	89,5524	3,1040
1	45,8120	55,1565	20,3973	50,6586	52,9201	4,4643	55,9094	58,4189	4,4884
2	30,8170	37,6480	22,1665	32,9366	37,0204	12,3989	35,0786	35,7166	1,8187
5	15,5488	17,7515	14,1665	16,0706	17,9242	11,5340	16,5641	17,6115	6,3233

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	99,3267	100,0475	0,7257	108,4478	110,7607	2,1327
1	60,8251	60,5143	-0,5109	64,1279	63,7393	-0,6060
2	36,9523	37,9031	2,5732	38,1458	37,5761	-1,4936
5	16,9704	17,2336	1,5507	17,2179	17,3631	0,8435

w/h	s/h								
	0,05			0,1			0,2		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	64,7018	70,0950	8,3354	74,8101	77,9804	4,2378	86,8564	90,4166	4,0990
1	45,8120	51,7933	13,0560	50,6586	53,0914	4,8023	55,9094	57,5966	3,0177
2	30,8170	36,6238	18,8430	32,9366	35,7815	8,6374	35,0786	35,9936	2,6084
5	15,5488	17,5690	12,9928	16,0706	17,6735	9,9738	16,5641	17,3686	4,8568

w/h	s/h					
	0,4			0,8		
	Z teo.	Z calc.	error(%)	Z teo.	Z calc.	error(%)
0,4	99,3267	99,8930	0,5701	108,4478	110,7873	2,1573
1	60,8251	62,1448	2,1697	64,1279	64,6094	0,7508
2	36,9523	37,5289	1,5605	38,1458	38,6654	1,3621
5	16,9704	16,9218	-0,2866	17,2179	17,3630	0,8430

Tablas de resultados de simulaciones de las líneas de transmisión con ancho finito de substrato, según la matriz de menor error correspondiente.

Modo Par:

w/h=0.4	s/h=0.1	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	141,2127	140,8629	-0,0420
20	141,2127	140,6098	-0,2216
10	141,2127	140,2515	-0,4759
8	141,2127	140,2389	-0,4848
5	141,2127	139,848	-0,7622
3,1	141,2127	130,877	-7,1281

w/h=1	s/h=0.1	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	74,3255	74,3763	-0,0270
20	74,3255	74,2905	-0,1423
10	74,3255	74,1698	-0,3046
8	74,3255	74,1029	-0,3945
5	74,3255	73,8682	-0,7100
3,1	74,3255	73,143	-1,6848

w/h=0.4	s/h=0.2	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	133,5120	133,1348	-0,0722
20	133,5120	132,7233	-0,3811
10	133,5120	132,306	-0,6943
8	133,5120	132,3058	-0,6944
5	133,5120	132,1979	-0,7754
3,1	133,5120	128,0811	-3,8654

w/h=1	s/h=0.2	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	72,1357	72,2014	-0,0518
20	72,1357	72,0418	-0,2727
10	72,1357	71,8169	-0,5840
8	72,1357	71,6921	-0,7568
5	72,1357	71,4748	-1,0576
3,1	72,1357	71,3118	-1,2832

w/h=0,4	s/h=0.4	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	123,6296	122,5625	-0,1114
20	123,6296	122,4139	-0,2325
10	123,6296	122,4142	-0,2323
8	123,6296	122,4143	-0,2322
5	123,6296	122,4059	-0,2390
3,1	123,6296	121,5492	-0,9373

w/h=1	s/h=0.4	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	69,1492	69,542	-0,0984
20	69,1492	69,2495	-0,5186
10	69,1492	68,8365	-1,1119
8	69,1492	68,6067	-1,4420
5	69,1492	68,3677	-1,7854
3,1	69,1492	68,325	-1,8467

w/h=0,4	s/h=0.8	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	115,3123	116,5167	-0,1523
20	115,3123	115,7526	-0,8071
10	115,3123	114,6571	-1,7458
8	115,3123	114,0389	-2,2756
5	115,3123	112,8717	-3,2758
3,1	115,3123	112,8051	-3,3329

w/h=1	s/h=0.8	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	66,4677	66,6012	-0,1592
20	66,4677	66,1465	-0,8408
10	66,4677	65,501	-1,8085
8	66,4677	65,4739	-1,8491
5	66,4677	65,4742	-1,8487
3,1	66,4677	65,4716	-1,8526

w/h=2	s/h=0.2	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	40,8428	40,8927	-0,0335
20	40,8428	40,8347	-0,1753
10	40,8428	40,7533	-0,3743
8	40,8428	40,7083	-0,4843
5	40,8428	40,5516	-0,8673
3,1	40,8428	40,285	-1,5191

w/h=5	s/h=0.2	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	17,7468	17,6897	-0,0124
20	17,7468	17,6802	-0,0661
10	17,7468	17,6669	-0,1413
8	17,7468	17,6595	-0,1831
5	17,7468	17,634	-0,3273
3,1	17,7468	17,5756	-0,6574

w/h=2	s/h=0.4	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	39,8679	39,9257	-0,0683
20	39,8679	39,8095	-0,3592
10	39,8679	39,6463	-0,7677
8	39,8679	39,5561	-0,9934
5	39,8679	39,3995	-1,3854
3,1	39,8679	39,3993	-1,3859

w/h=5	s/h=0.4	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	17,5602	17,5115	-0,0320
20	17,5602	17,4877	-0,1678
10	17,5602	17,4545	-0,3574
8	17,5602	17,4361	-0,4624
5	17,5602	17,3727	-0,8243
3,1	17,5602	17,3204	-1,1229

w/h=2	s/h=0.8	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	38,9617	39,2686	-0,1315
20	38,9617	39,0478	-0,6930
10	38,9617	38,7364	-1,4850
8	38,9617	38,5634	-1,9250
5	38,9617	38,3836	-2,3822
3,1	38,9617	38,3839	-2,3815

w/h=5	s/h=0.8	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	17,3821	17,4073	-0,0741
20	17,3821	17,3525	-0,3886
10	17,3821	17,2755	-0,8306
8	17,3821	17,233	-1,0746
5	17,3821	17,0851	-1,9236
3,1	17,3821	16,9853	-2,4965

Modo Impar:

w/h=0.4	s/h=0.1	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	74,8101	77,8613	-0,1555
20	74,8101	77,3396	-0,8245
10	74,8101	76,591	-1,7845
8	74,8101	76,5685	-1,8134
5	74,8101	76,464	-1,9474
3,1	74,8101	73,9816	-5,1306

w/h=1	s/h=0.1	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	50,6586	52,8613	-0,1139
20	50,6586	52,609	-0,5907
10	50,6586	52,6091	-0,5905
8	50,6586	52,6091	-0,5905
5	50,6586	52,6089	-0,5909
3,1	50,6586	52,427	-0,9346

w/h=0.4	s/h=0.2	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	86,8564	89,4058	-0,1646
20	86,8564	88,7716	-0,8728
10	86,8564	88,123	-1,597
8	86,8564	88,1229	-1,5972
5	86,8564	88,0784	-1,6468
3,1	86,8564	86,3696	-3,555

w/h=1	s/h=0.2	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	55,9094	56,5557	-0,1271
20	55,9094	56,4896	-0,2439
10	55,9094	56,4897	-0,2437
8	55,9094	56,4897	-0,2437
5	55,9094	56,4897	-0,2437
3,1	55,9094	56,3741	-0,4478

w/h=0.4	s/h=0.4	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	99,3267	99,8554	-0,0414
20	99,3267	99,8558	-0,0410
10	99,3267	99,856	-0,0408
8	99,3267	99,8562	-0,0406
5	99,3267	99,853	-0,0438
3,1	99,3267	99,2971	-0,6003

w/h=1	s/h=0.4	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	60,8251	60,6538	-0,1487
20	60,8251	60,2659	-0,7872
10	60,8251	60,1819	-0,9255
8	60,8251	60,1819	-0,9255
5	60,8251	60,182	-0,9254
3,1	60,8251	60,1541	-0,9713

w/h=0.4	s/h=0.8	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	108,4478	110,5279	-0,1704
20	108,4478	109,416	-1,1747
10	108,4478	108,5504	-1,9565
8	108,4478	107,8917	-2,5515
5	108,4478	106,6458	-3,6768
3,1	108,4478	106,587	-3,7363

w/h=1	s/h=0.8	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	64,1279	63,6259	-0,1787
20	64,1279	63,1374	-0,9451
10	64,1279	63,0404	-1,0973
8	64,1279	63,0404	-1,0973
5	64,1279	63,0405	-1,0971
3,1	64,1279	63,0378	-1,1014

w/h=2	s/h=0.2	n=40	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	35,0786	35,6876	-0,0832
20	35,0786	35,563	-0,4320
10	35,0786	35,5631	-0,4317
8	35,0786	35,5631	-0,4317
5	35,0786	35,5632	-0,4314
3,1	35,0786	35,5617	-0,4356

w/h=5	s/h=0.2	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	16,5641	17,3622	-0,038
20	16,5641	17,3336	-0,2027
10	16,5641	17,2922	-0,441
8	16,5641	17,2687	-0,5763
5	16,5641	17,1826	-1,072
3,1	16,5641	17,1771	-1,1037

w/h=2	s/h=0.4	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	36,9523	36,6158	-0,1004
20	36,9523	36,5821	-0,1923
10	36,9523	36,5823	-0,1918
8	36,9523	36,5821	-0,1923
5	36,9523	36,5822	-0,1921
3,1	36,9523	36,5818	-0,1932

w/h=5	s/h=0.4	n=50	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	16,9704	16,9139	-0,0479
20	16,9704	16,8937	-0,1672
10	16,9704	16,8938	-0,1666
8	16,9704	16,8938	-0,1666
5	16,9704	16,8939	-0,1661
3,1	16,9704	16,894	-0,1655

w/h=2	s/h=0.8	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	38,1458	37,5314	-0,1400
20	38,1458	37,3065	-0,7383
10	38,1458	37,2579	-0,8677
8	38,1458	37,258	-0,8674
5	38,1458	37,258	-0,8674
3,1	38,1458	37,2581	-0,8671

w/h=5	s/h=0.8	n=30	
a/s+w	Z teo.	Z calc.	error(%)
100	17,2179	17,3536	-0,0823
20	17,2179	17,2925	-0,4341
10	17,2179	17,2059	-0,9328
8	17,2179	17,1576	-1,2109
5	17,2179	16,9867	-2,1949
3,1	17,2179	16,8683	-2,8766